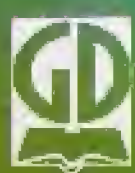
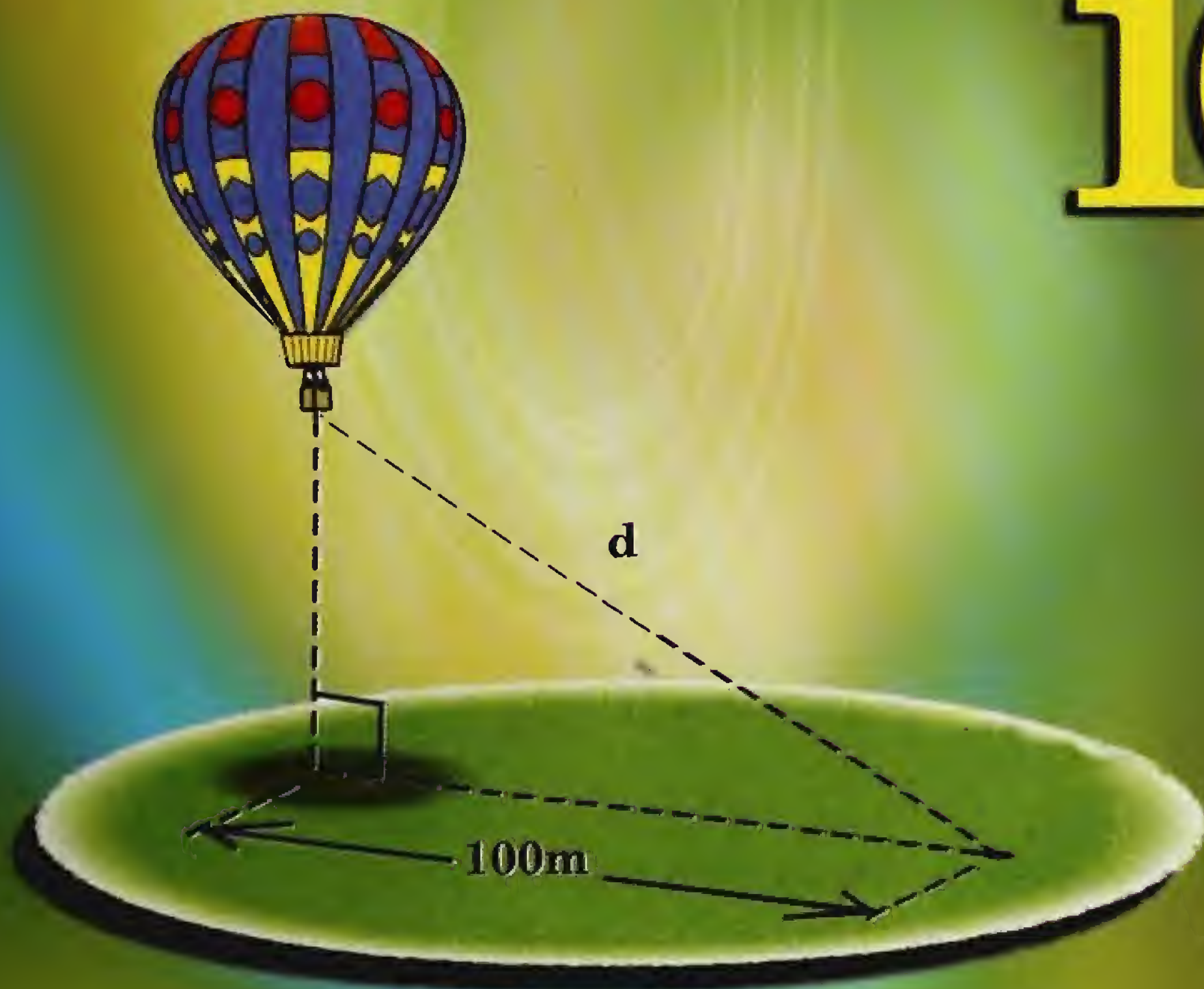


NGUYỄN MỘNG HY (Chủ biên)  
NGUYỄN VĂN ĐOÀN - TRẦN ĐỨC HUYỀN

# BÀI TẬP

# HÌNH HỌC

# 10



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM



NGUYỄN MỘNG HY (Chủ biên)  
NGUYỄN VĂN ĐOÀN – TRẦN ĐỨC HUYỀN

# BÀI TẬP HÌNH HỌC 10

*(Tái bản lần thứ năm)*

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Bản quyền thuộc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam - Bộ Giáo dục và Đào tạo.

01-2011/CXB/815-1235/GD

Mã số : CB004T1

# LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách **BÀI TẬP HÌNH HỌC 10** được biên soạn nhằm giúp cho học sinh lớp 10 có điều kiện tham khảo và tự học để nắm vững các kiến thức và các kỹ năng cơ bản đã được học trong Sách giáo khoa Hình học 10. Nội dung cuốn sách bám sát nội dung của sách giáo khoa mới, phù hợp với chương trình mới của Bộ Giáo dục và Đào tạo vừa ban hành năm 2006. Cuốn sách bài tập này được viết theo tinh thần tạo điều kiện để góp phần đổi mới phương pháp dạy và học, nhằm phát huy được khả năng tự học, tự tìm tòi khám phá của học sinh, rèn luyện được phương pháp học tập sáng tạo, thông minh của đông đảo học sinh.

Nội dung cuốn sách này gồm :

- **Chương I : Vector**
- **Chương II : Tích vô hướng của hai vectơ và ứng dụng**
- **Chương III : Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng**

**Bài tập cuối năm**

Nội dung mỗi chương được chia ra nhiều chủ đề, mỗi chủ đề là một xoắn (§). Cấu trúc của mỗi xoắn được trình bày theo thứ tự sau đây :

- A. Các kiến thức cần nhớ :** Phần này nêu tóm tắt lý thuyết của sách giáo khoa nhằm củng cố những kiến thức cơ bản, những kỹ năng cơ bản và các công thức cần nhớ.
- B. Dạng toán cơ bản :** Phần này hệ thống lại các dạng toán thường gặp trong khi làm bài tập, cung cấp cho học sinh các phương pháp giải, đồng thời cho các ví dụ minh họa về cách giải các bài toán thuộc các dạng vừa nêu ở phần trên và cho thêm các chú ý hoặc nhận xét cần thiết.
- C. Câu hỏi và bài tập :** Phần này nhằm mục đích củng cố và vận dụng các kiến thức và kỹ năng cơ bản đã học để trả lời các câu hỏi và làm bài tập thuộc các dạng đã nêu, giúp học sinh rèn luyện được phong cách tự học.

*Cuối mỗi chương có bài tập mang tính chất ôn tập và khoảng 30 câu hỏi trắc nghiệm.*

*Việc đưa thêm các câu hỏi trắc nghiệm nhằm giúp học sinh làm quen với một dạng bài tập mới, mà nhiều nước trên thế giới hiện nay đang dùng trong các sách giáo khoa của trường phổ thông. Cuối cuốn sách có phần hướng dẫn giải và đáp số.*

*Dù các tác giả đã cố gắng rất nhiều, nhưng vì thời gian biên soạn có hạn nên cuốn sách không sao tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong các độc giả vui lòng góp ý để cho những lần tái bản sau sách sẽ hoàn chỉnh hơn.*

**CÁC TÁC GIẢ**



### §1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

#### A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Để xác định một vectơ cần biết một trong hai điều kiện sau :
  - Điểm đầu và điểm cuối của vectơ ;
  - Độ dài và hướng.
2. Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.  
Nếu hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương thì chúng có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.
3. Độ dài của một vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.
4.  $\vec{a} = \vec{b}$  khi và chỉ khi  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$  và  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng hướng.
5. Với mỗi điểm A ta gọi  $\overrightarrow{AA}$  là vectơ - không. Vectơ - không được kí hiệu là  $\vec{0}$  và quy ước rằng  $|\vec{0}| = 0$ , vectơ  $\vec{0}$  cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ.

#### B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN



#### Vấn đề 1

Xác định một vectơ, sự cùng phương và hướng của hai vectơ

## 1. Phương pháp

- Để xác định vectơ  $\vec{a} \neq \vec{0}$  ta cần biết  $|\vec{a}|$  và hướng của  $\vec{a}$  hoặc biết điểm đầu và điểm cuối của  $\vec{a}$ . Chẳng hạn, với hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$  ta có hai vectơ khác vectơ  $\vec{0}$  là  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BA}$ .
- Vectơ  $\vec{a}$  là vectơ - không khi và chỉ khi  $|\vec{a}| = 0$  hoặc  $\vec{a} = \overrightarrow{AA}$  với  $A$  là điểm bất kì.

## 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Cho 5 điểm phân biệt  $A, B, C, D$  và  $E$ . Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đã cho ?

*GIẢI*

Với hai điểm phân biệt, chẳng hạn  $A$  và  $B$ , có hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BA}$ . Ta có 10 cặp điểm khác nhau, cụ thể là :

$$\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{D, E\}.$$

Do đó ta có 20 vectơ (khác  $\vec{0}$ ) có điểm đầu và điểm cuối là 5 điểm đã cho.

*Cách khác :* Một vectơ được xác định khi biết điểm đầu và điểm cuối của nó. Với 5 điểm phân biệt, ta có 5 cách chọn điểm đầu. Với mỗi cách chọn điểm đầu ta có 4 cách chọn điểm cuối. Vậy số vectơ khác  $\vec{0}$  là :  $5 \times 4 = 20$  (vectơ).



**Ví dụ 2.** Cho điểm  $A$  và vectơ  $\vec{a}$  khác  $\vec{0}$ . Tìm điểm  $M$  sao cho :

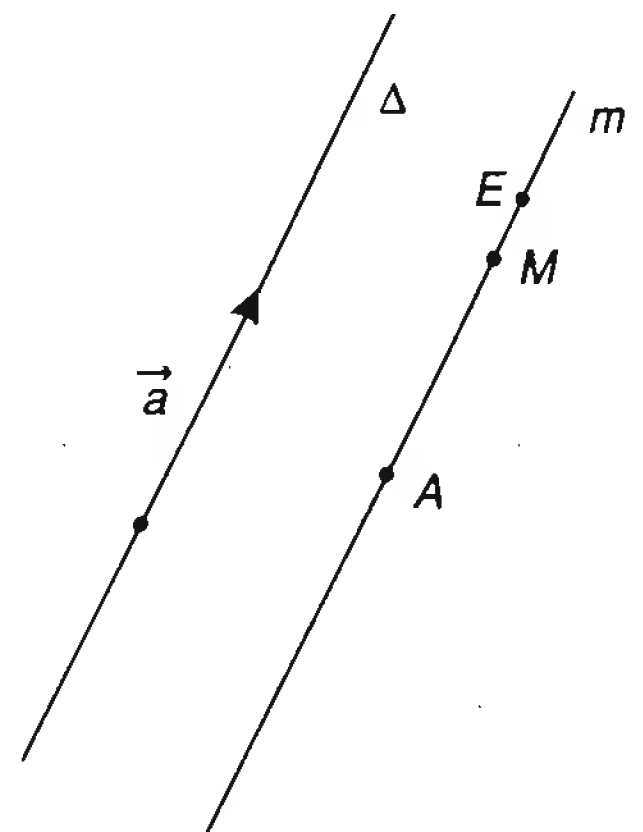
- $\overrightarrow{AM}$  cùng phương với  $\vec{a}$  ;
- $\overrightarrow{AM}$  cùng hướng với  $\vec{a}$ .

*GIẢI*

Gọi  $\Delta$  là giá của  $\vec{a}$  (h.1.1).

a) Nếu  $\overrightarrow{AM}$  cùng phương với  $\vec{a}$  thì đường thẳng  $AM$  song song với  $\Delta$ . Do đó  $M$  thuộc đường thẳng  $m$  đi qua  $A$  và song song với  $\Delta$ .

Ngược lại, mọi điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $m$  thì  $\overrightarrow{AM}$  cùng phương với  $\vec{a}$ .



Hình 1.1



Chú ý rằng nếu  $A$  thuộc đường thẳng  $\Delta$  thì  $m$  trùng với  $\Delta$ .

b) Lập luận tương tự như trên, ta thấy các điểm  $M$  thuộc một nửa đường thẳng gốc  $A$  của đường thẳng  $m$ . Cụ thể, đó là nửa đường thẳng có chứa điểm  $E$  sao cho  $\overrightarrow{AE}$  và  $\vec{a}$  cùng hướng.



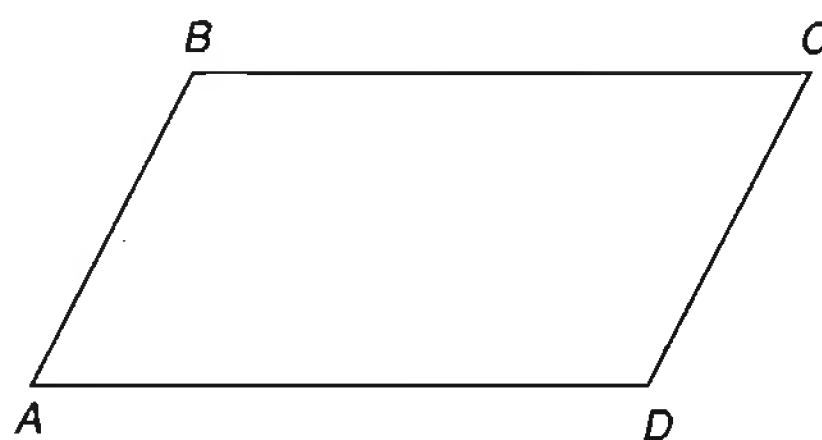
## VẤN ĐỀ 2

Chứng minh hai vectơ bằng nhau

### 1. Phương pháp

Để chứng minh hai vectơ bằng nhau ta có thể dùng một trong ba cách sau :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \left| \vec{a} \right| = \left| \vec{b} \right| \\ \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng hướng} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}.$$



Hình 1.2

- Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  và  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$  (h.1.2).
- Nếu  $\vec{a} = \vec{b}$ ,  $\vec{b} = \vec{c}$  thì  $\vec{a} = \vec{c}$ .

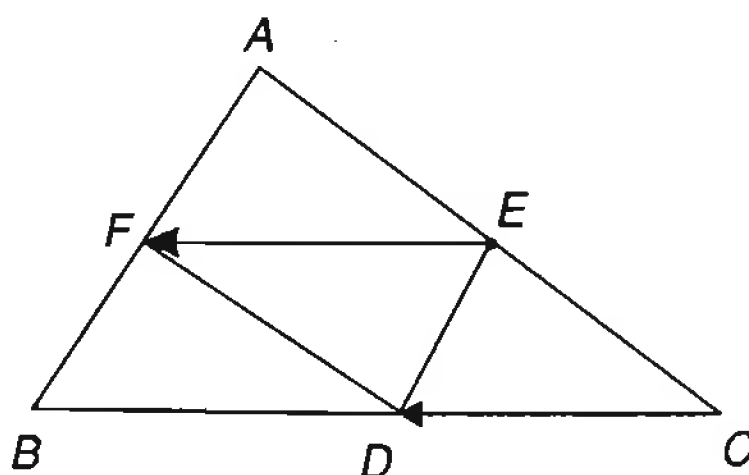
### 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$  có  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Chứng minh  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$ .

GIẢI

(Xem h.1.3)




Hình 1.3

*Cách 1.* Vì  $EF$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$  nên  $EF = \frac{1}{2}BC$  và

$EF \parallel BC$ . Do đó tứ giác  $EFDC$  là hình bình hành, nên  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$ .

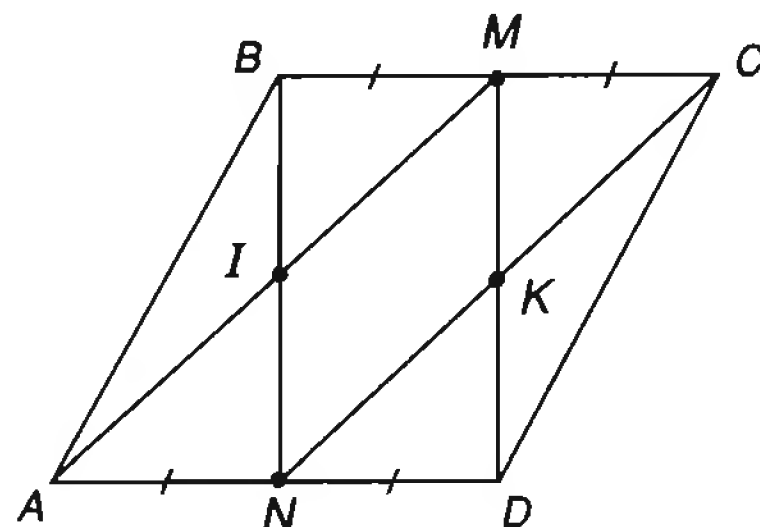
*Cách 2.* Tứ giác  $FECD$  là hình bình hành vì có các cặp cạnh đối song song. Suy ra  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$ .

 **Ví dụ 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Hai điểm  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ . Điểm  $I$  là giao điểm của  $AM$  và  $BN$ ,  $K$  là giao điểm của  $DM$  và  $CN$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$ ,  $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{NI}$ .


*GIẢI*

Tứ giác  $AMCN$  là hình bình hành vì  $MC = AN$  và  $MC \parallel AN$ . Suy ra  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$  (h.1.4).

Vì  $MCDN$  là hình bình hành nên  $K$  là trung điểm của  $MD$ . Suy ra  $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{KM}$ . Tứ giác  $IMKN$  là hình bình hành, suy ra  $\overrightarrow{NI} = \overrightarrow{KM}$ . Do đó  $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{NI}$ .



Hình 1.4

 **Ví dụ 3.** Chứng minh rằng nếu hai vectơ bằng nhau có chung điểm đầu (hoặc điểm cuối) thì chúng có chung điểm cuối (hoặc điểm đầu).

*GIẢI*

Giả sử  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ . Khi đó  $AB = AC$ , ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng và  $B, C$  thuộc một nửa đường thẳng gốc  $A$ . Do đó  $B \equiv C$ .

Nếu hai vectơ bằng nhau có chung điểm cuối thì chúng có chung điểm đầu được chứng minh tương tự.

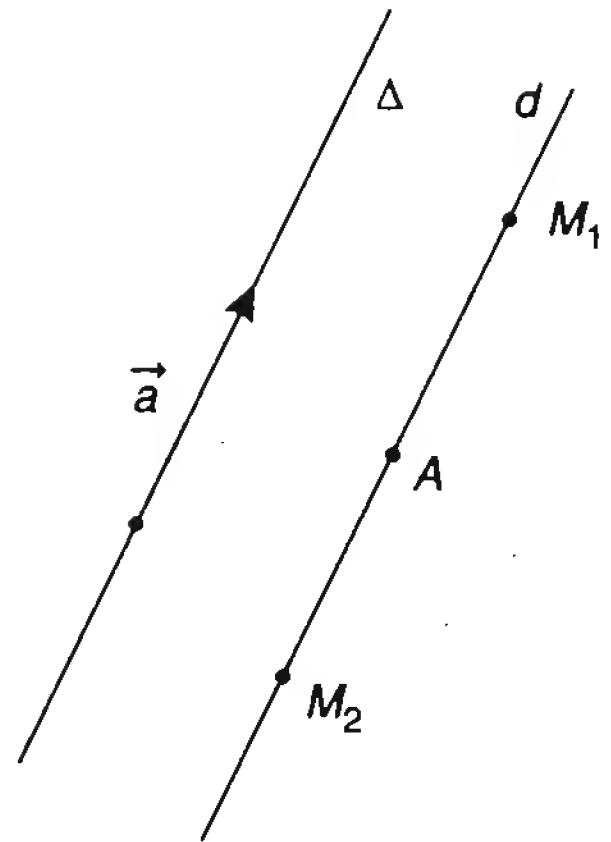
 **Ví dụ 4.** Cho điểm  $A$  và vectơ  $\vec{a}$ . Dựng điểm  $M$  sao cho :

a)  $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$  ;

b)  $\overrightarrow{AM}$  cùng phương với  $\vec{a}$  và có độ dài bằng  $|\vec{a}|$ .


### GIẢI

Gọi  $\Delta$  là giá của vectơ  $\vec{a}$ . Vẽ đường thẳng  $d$  đi qua  $A$  và  $d \parallel \Delta$  (nếu điểm  $A$  thuộc  $\Delta$  thì  $d$  trùng với  $\Delta$ ). Khi đó có hai điểm  $M_1$  và  $M_2$  thuộc đường thẳng  $d$  sao cho  $AM_1 = AM_2 = |\vec{a}|$  (h.1.5). Ta có :



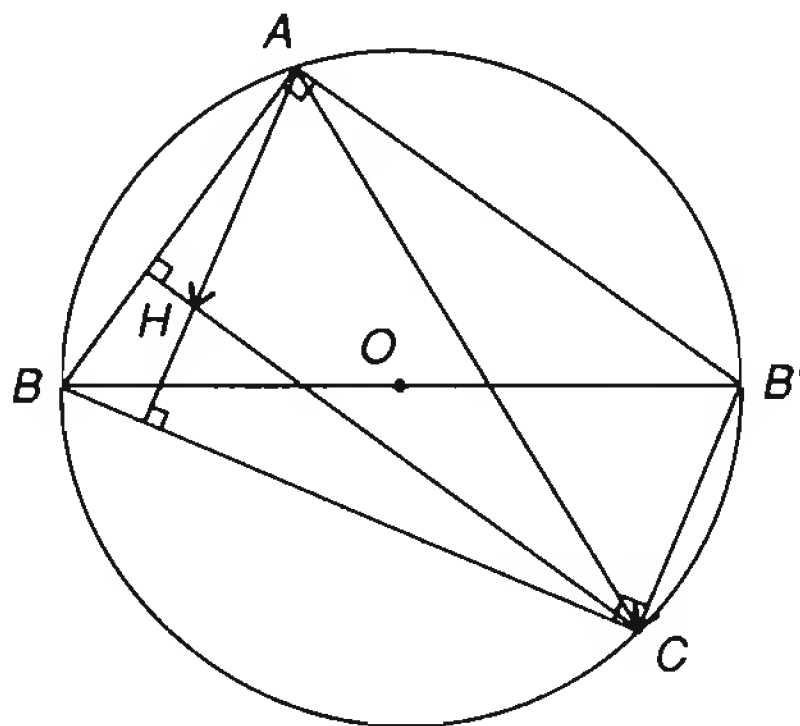
Hình 1.5

- $\overrightarrow{AM_1} = \vec{a}$  ;
- $\overrightarrow{AM_1}$  và  $\overrightarrow{AM_2}$  cùng phương với  $\vec{a}$  và có độ dài bằng độ dài của  $\vec{a}$ .

 **Ví dụ 5.** Cho tam giác  $ABC$  có  $H$  là trực tâm và  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi  $B'$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $O$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$ .

### GIẢI

Vì  $BB'$  là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  nên  $\widehat{BAB'} = \widehat{BCB'} = 90^\circ$ . Do đó  $CH \parallel B'A$  và  $AH \parallel B'C$ . Suy ra tứ giác  $AB'CH$  là hình bình hành. Vậy  $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$  (h.1.6).



Hình 1.6

## C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

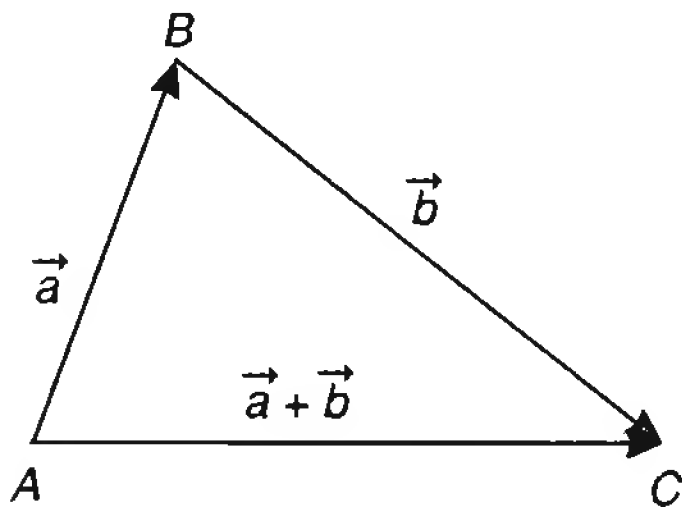
- 1.1. Hãy tính số các vectơ (khác  $\vec{0}$ ) mà các điểm đầu và điểm cuối được lấy từ các điểm phân biệt đã cho trong các trường hợp sau :
- Hai điểm ;
  - Ba điểm ;
  - Bốn điểm.
- 1.2. Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ . Liệt kê tất cả các vectơ bằng nhau (khác  $\vec{0}$ ) nhận đỉnh hoặc tâm của hình vuông làm điểm đầu và điểm cuối.
- 1.3. Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P$  và  $Q$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC, CD$  và  $DA$ . Chứng minh  $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$  và  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NM}$ .
- 1.4. Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB$  và  $AC$ . So sánh độ dài của hai vectơ  $\overrightarrow{NM}$  và  $\overrightarrow{BC}$ . Vì sao có thể nói hai vectơ này cùng phương ?
- 1.5. Cho tứ giác  $ABCD$ , chứng minh rằng nếu  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  thì  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .
- 1.6. Xác định vị trí tương đối của ba điểm phân biệt  $A, B$  và  $C$  trong các trường hợp sau :
- $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng hướng,  $|\overrightarrow{AB}| > |\overrightarrow{AC}|$  ;
  - $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  ngược hướng ;
  - $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương.
- 1.7. Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đặt  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DA}$ ,  $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC}$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AQ} = \vec{0}$ .

## §2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTO

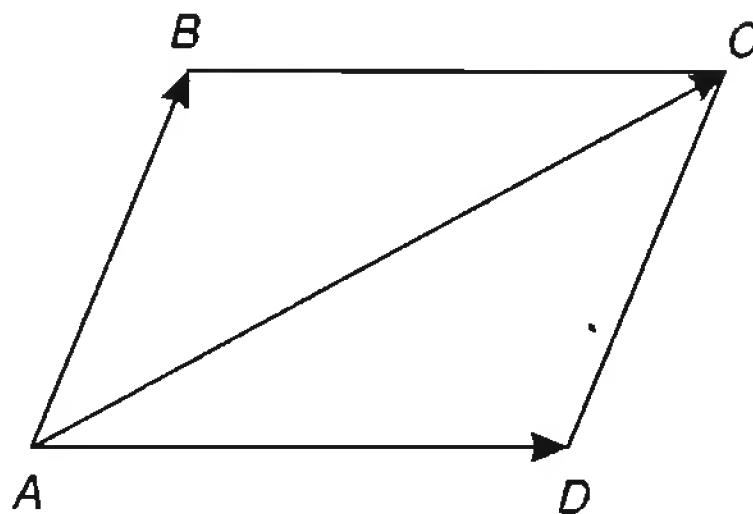
### A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Định nghĩa tổng của hai vectơ và quy tắc tìm tổng

- Cho hai vectơ tùy ý  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Lấy điểm  $A$  tùy ý, dựng  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ .  
Khi đó  $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$  (h.1.7).
- Với ba điểm  $M, N$  và  $P$  tùy ý ta luôn có :  
 $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ , (quy tắc ba điểm)
- Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành, ta có (h.1.8) :  
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$  (quy tắc hình bình hành).



Hình 1.7



Hình 1.8

#### 2. Định nghĩa vectơ đối

- Vectơ  $\vec{b}$  là vectơ đối của vectơ  $\vec{a}$  nếu  $|\vec{b}| = |\vec{a}|$  và  $\vec{a}, \vec{b}$  là hai vectơ ngược hướng. Kí hiệu  $\vec{b} = -\vec{a}$ .
- Nếu  $\vec{a}$  là vectơ đối của  $\vec{b}$  thì  $\vec{b}$  là vectơ đối của  $\vec{a}$  hay  $-(-\vec{a}) = \vec{a}$ .
- Mỗi vectơ đều có vectơ đối. Vectơ đối của  $\overrightarrow{AB}$  là  $\overrightarrow{BA}$ . Vectơ đối của  $\vec{0}$  là  $\vec{0}$ .

#### 3. Định nghĩa hiệu của hai vectơ và quy tắc tìm hiệu

- $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$  ;
- Ta có :  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$  với ba điểm  $O, A, B$  bất kì (quy tắc trừ).

#### 4. Tính chất của phép cộng các vectơ

Với ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  bất kì ta có

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  (tính chất giao hoán) ;
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  (tính chất kết hợp) ;
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$  (tính chất của vectơ - không) ;
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$ .

### B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN



#### VẤN ĐỀ 1

Tìm tổng của hai vectơ và tổng của nhiều vectơ

##### 1. Phương pháp

Dùng định nghĩa tổng của hai vectơ, quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và các tính chất của tổng các vectơ.

##### 2. Các ví dụ



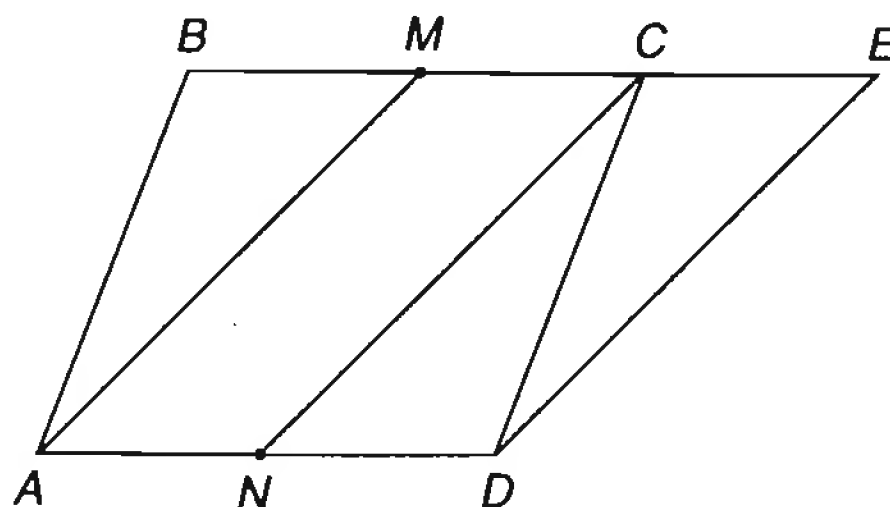
**Ví dụ 1.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Hai điểm  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ .

a) Tìm tổng của hai vectơ  $\vec{NC}$  và  $\vec{MC}$  ;  $\vec{AM}$  và  $\vec{CD}$  ;  $\vec{AD}$  và  $\vec{NC}$ .

b) Chứng minh  $\vec{AM} + \vec{AN} = \vec{AB} + \vec{AD}$ .

GIẢI

(Xem h.1.9)



Hình 1.9



a) Vì  $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AN}$ , ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{AN} \\ &= \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Vì  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ , ta có  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$ .

Vì  $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AM}$ , ta có  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE}$ , với  $E$  là đỉnh của hình bình hành  $AMED$ .

b) Vì tứ giác  $AMCN$  là hình bình hành nên ta có  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$ .

Vì tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .

Vậy  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ .



**Ví dụ 2.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ .

Chứng minh  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$ .

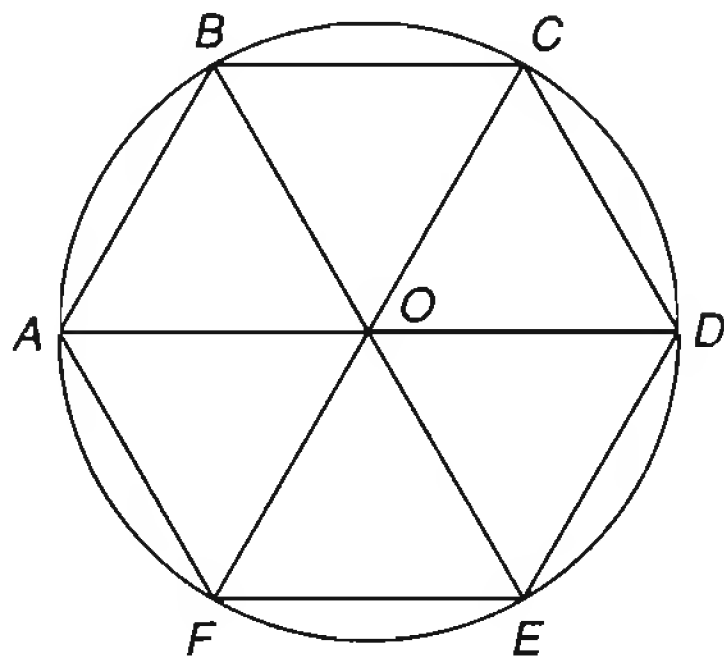
*GIẢI*

Tâm  $O$  của lục giác đều là tâm đối xứng của lục giác (h.1.10).

Ta có  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$ ,  
 $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$ .

Do đó :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} &= \\ &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF}) = \vec{0}.\end{aligned}$$



Hình 1.10



**Ví dụ 3.** Cho  $\vec{a}, \vec{b}$  là các vectơ khác  $\vec{0}$  và  $\vec{a} \neq \vec{b}$ . Chứng minh các khẳng định sau :

a) Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương thì  $\vec{a} + \vec{b}$  cùng phương với  $\vec{a}$  ;

b) Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng thì  $\vec{a} + \vec{b}$  cùng hướng với  $\vec{a}$ .

*GIẢI*

Giả sử  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ ,  $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ .

a) Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương thì ba điểm  $A, B, C$  cùng thuộc một đường thẳng. Hai vectơ  $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$  và  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  có cùng giá, vậy chúng cùng phương.

b) Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng, thì ba điểm  $A, B, C$  cùng thuộc một đường thẳng và  $B, C$  nằm về một phía của  $A$ . Vậy  $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$  và  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  cùng hướng.



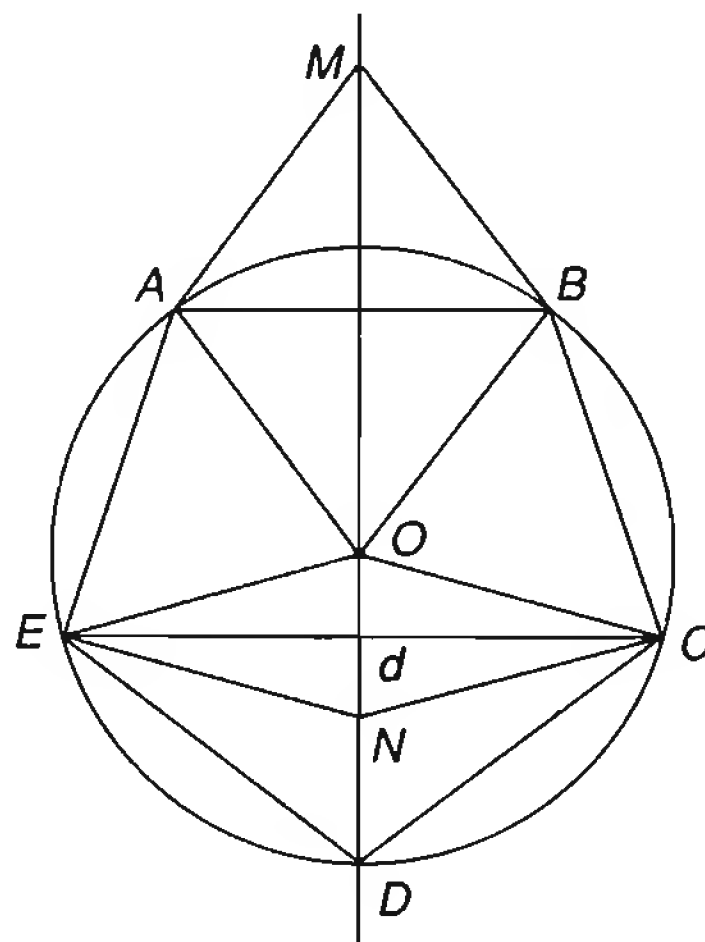
**Ví dụ 4.** Cho ngũ giác đều  $ABCDE$  tâm  $O$ .

a) Chứng minh rằng hai vectơ  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  và  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}$  đều cùng phương với  $\overrightarrow{OD}$ .

b) Chứng minh hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{EC}$  cùng phương.

*GIẢI*

(Xem h.1.11)



Hình 1.11

a) Gọi  $d$  là đường thẳng chứa  $OD$  thì  $d$  là một trục đối xứng của ngũ giác đều. Ta có  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$ , trong đó  $M$  là đỉnh của hình thoi  $OAMB$  và thuộc  $d$ . Cũng như vậy,  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{ON}$ , trong đó  $N$  thuộc  $d$ . Vậy  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  và  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}$  đều cùng phương với  $\overrightarrow{OD}$  vì cùng có chung giá  $d$ .

b)  $AB$  và  $EC$  cùng vuông góc với  $d$  nên  $AB \parallel EC$ , suy ra  $\overrightarrow{AB}$  cùng phương  $\overrightarrow{EC}$ .



## VẤN ĐỀ 2

Tìm vectơ đối và hiệu của hai vectơ

### 1. Phương pháp

- Theo định nghĩa, để tìm hiệu  $\vec{a} - \vec{b}$ , ta làm hai bước sau :
  - Tìm vectơ đối của  $\vec{b}$  ;
  - Tính tổng  $\vec{a} + (-\vec{b})$ .
- Vận dụng quy tắc  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$  với ba điểm  $O, A, B$  bất kì.

### 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Chứng minh  $-(\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} + (-\vec{b})$ .

GIẢI

Giả sử  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$  thì  $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ . Ta có  $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ ,  $-\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ .

Do đó  $-\vec{a} + (-\vec{b}) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -(\vec{a} + \vec{b})$ .



**Ví dụ 2.**

a) Chứng minh rằng nếu  $\vec{a}$  là vectơ đối của  $\vec{b}$  thì  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ .

b) Chứng minh rằng điểm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ .

GIẢI

a) Giả sử  $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$  thì  $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ . Do đó  $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$ .

b) Nếu  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  thì  $IA = IB$  và hai vectơ  $\overrightarrow{IA}$ ,  $\overrightarrow{IB}$  ngược hướng. Vậy  $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ .

Ngược lại, nếu  $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$  thì  $IA = IB$  và hai vectơ  $\overrightarrow{IA}$ ,  $\overrightarrow{IB}$  ngược hướng. Do đó  $A, I, B$  thẳng hàng. Vậy  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ .



**Ví dụ 3.** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M, N$  và  $P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC$  và  $BC$ .

a) Tìm hiệu  $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$ ,  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC}$ ,  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN}$ ,  $\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP}$ .

b) Phân tích  $\overrightarrow{AM}$  theo hai vectơ  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{MP}$ .

GIẢI

(Xem h.1.12)

a)  $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NM}$  ;

$$\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PN}$$

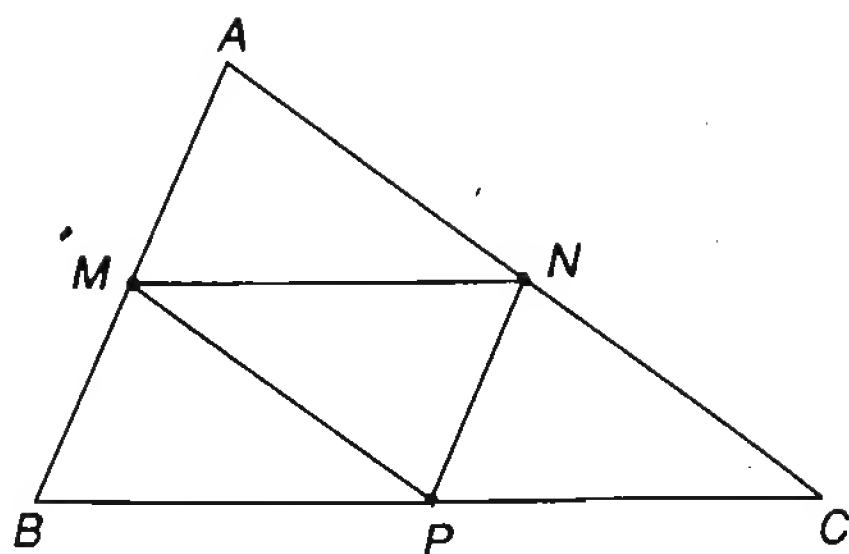
(vì  $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MP}$ ) ;

$$\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$$

(vì  $-\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NP}$ ) ;

$$\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BC} \text{ (vì } -\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{PC} \text{)}.$$

b)  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}$ .



Hình 1.12



### VẤN ĐỀ 3

Tính độ dài của  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{b}$

#### 1. Phương pháp

Đầu tiên tính  $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{CD}$ . Sau đó tính độ dài các đoạn thẳng  $AB$  và  $CD$  bằng cách gắn nó vào các đa giác mà ta có thể tính được độ dài các cạnh của nó hoặc bằng các phương pháp tính trực tiếp khác.

#### 2. Các ví dụ



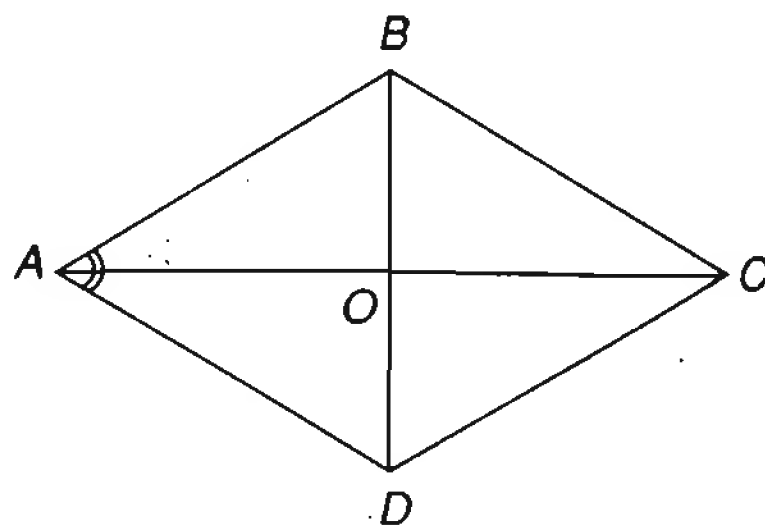
**Ví dụ 1.** Cho hình thoi  $ABCD$  có  $\widehat{BAD} = 60^\circ$  và cạnh là  $a$ . Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo. Tính  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$ ,  $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$ ,  $|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC}|$ .

GIẢI

Vì tứ giác  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$  và  $\widehat{BAD} = 60^\circ$  nên  $AC = a\sqrt{3}$ ,  $BD = a$  (h.1.13).

Ta có :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$  nên

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = AC = a\sqrt{3} ;$$



Hình 1.13

$$\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \text{ nên } |\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}| = CA = a\sqrt{3} ;$$

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CO} \text{ (vì } \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO} \text{)}.$$

$$\text{Do đó } |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC}| = CO = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



**Ví dụ 2.** Chứng minh các khẳng định sau :

a) Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng thì  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ .

b) Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng và  $|\vec{b}| \geq |\vec{a}|$  thì  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b}| - |\vec{a}|$ .

c)  $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ . Khi nào xảy ra dấu đẳng thức ?

*GIẢI*

Giả sử  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$  thì  $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ .

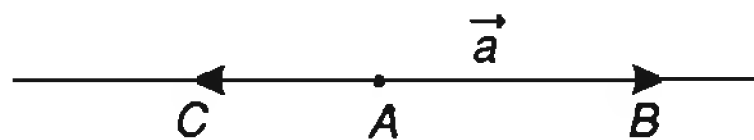
a) Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng thì ba điểm  $A, B, C$  cùng thuộc một đường thẳng và  $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$ . Do đó  $AB + BC = AC$  (h.1.14).



Hình 1.14

Vậy  $|\vec{a} + \vec{b}| = AC = AB + BC = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ .

b) Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng và  $|\vec{b}| \geq |\vec{a}|$  thì ba điểm  $A, B, C$  cùng thuộc một đường thẳng và  $A$  nằm giữa  $B$  và  $C$ . Do đó  $AC = BC - AB$  (h.1.15).



Hình 1.15

Vậy  $|\vec{a} + \vec{b}| = AC = BC - AB = |\vec{b}| - |\vec{a}|$ .

c) Từ các chứng minh trên suy ra rằng nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương thì  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$  hoặc  $|\vec{a} + \vec{b}| = ||\vec{a}| - |\vec{b}||$ .


Xét trường hợp  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương. Khi đó  $A, B, C$  không thẳng hàng.

Trong tam giác  $ABC$  ta có hệ thức  $AC < AB + BC$ . Do đó  $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$ .

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Đẳng thức xảy ra khi  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.

 **Ví dụ 3.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$  có  $O$  là giao điểm của hai đường chéo. Hãy tính  $|\vec{OA} - \vec{CB}|$ ,  $|\vec{AB} + \vec{DC}|$ ,  $|\vec{CD} - \vec{DA}|$ .

*GIẢI*

Ta có  $AC = BD = a\sqrt{2}$ ,

$$\vec{OA} - \vec{CB} = \vec{CO} - \vec{CB} = \vec{BO} \text{ (h.1.16).}$$

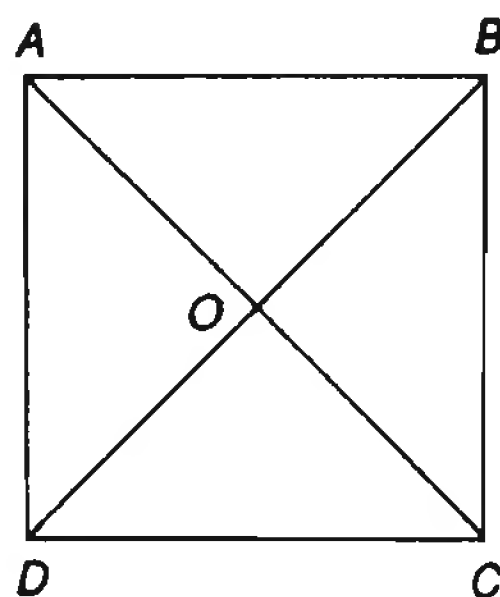
Do đó  $|\vec{OA} - \vec{CB}| = BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

$$|\vec{AB} + \vec{DC}| = |\vec{AB}| + |\vec{DC}| = 2a$$

(vì  $\vec{AB}$  và  $\vec{DC}$  cùng hướng),

$$\vec{CD} - \vec{DA} = \vec{CD} - \vec{CB} = \vec{BD} \text{ (vì } \vec{DA} = \vec{CB}).$$

Do đó  $|\vec{CD} - \vec{DA}| = BD = a\sqrt{2}.$



Hình 1.16



## VẤN ĐỀ 4

Chứng minh đẳng thức vectơ

### 1. Phương pháp

Mỗi vế của một đẳng thức vectơ gồm các vectơ được nối với nhau bởi các phép toán vectơ. Ta dùng quy tắc tìm tổng, hiệu của hai vectơ, tìm vectơ đối để biến đổi vế này thành vế kia của đẳng thức hoặc biến đổi cả hai vế của đẳng thức để được hai vế bằng nhau. Ta cũng có thể biến đổi đẳng thức vectơ cần chứng minh đó tương đương với một đẳng thức vectơ được công nhận là đúng.



## 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Chứng minh các khẳng định sau :

a)  $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{c}$  ;

b)  $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$ .

GIẢI

a) Nếu  $\vec{a} = \vec{b} = \overrightarrow{AB}$  và  $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$  thì  $\vec{a} + \vec{c} = \overrightarrow{AC}$ ,  $\vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AC}$ . Vậy  $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{c}$ .

Ngược lại, nếu  $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{c}$  ta cần chứng minh  $\vec{a} = \vec{b}$ . Giả sử  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{A_1B}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$ .

Từ  $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{c}$  suy ra  $\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{AC}$ . Vậy  $A_1 \equiv A$  hay  $\vec{a} = \vec{b}$ .

b)  $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{c} + (-\vec{c}) = \vec{b} + (-\vec{c}) \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$ .



**Ví dụ 2.** Cho sáu điểm  $A, B, C, D, E$  và  $F$ . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}. \quad (1)$$

GIẢI

Cách 1. Ta có : (1)  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BE} \Leftrightarrow \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EF}$   
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EF}$ . Vậy đẳng thức (1) được chứng minh.

Cách 2. Biến đổi vế trái :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF} \\ &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DF} \\ &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} \end{aligned}$$

$$(\text{vì } \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{FF} = \vec{0}).$$

Cách 3. Biến đổi vế phải :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FD} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} \end{aligned}$$

$$(\text{vì } \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD} = \vec{0}).$$

- Sau đây là bài toán tương tự :

Cho bốn điểm  $A, B, C$  và  $D$ . Hãy chứng minh  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$  theo ba cách như ví dụ trên.



**Ví dụ 3.** Cho năm điểm  $A, B, C, D$  và  $E$ . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}.$$

*GIẢI*

Ta có  $-\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD}$ ,  $-\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EC}$  nên :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB} \\ &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}) + \overrightarrow{EC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$



**Ví dụ 4.** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M, N$  và  $P$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, AC$  và  $BC$ . Chứng minh rằng với điểm  $O$  bất kì ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}.$$

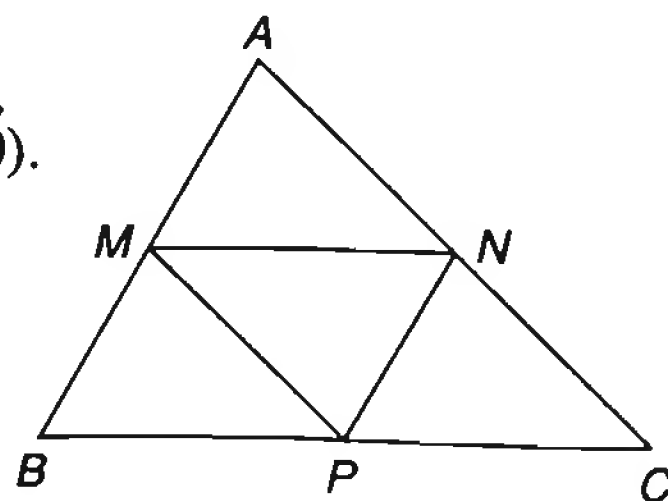
*GIẢI*

Biến đổi vế trái (h.1.17) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NC} \\ &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{NC} \\ &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{AN} \\ &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} \end{aligned}$$

(vì  $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{NM}$ ,  $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AN}$

và  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NN} = \vec{0}$ ).



Hình 1.17

C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

- 1.8. Cho năm điểm  $A, B, C, D$  và  $E$ . Hãy tính tổng  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$ .
- 1.9. Cho bốn điểm  $A, B, C$  và  $D$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$ .
- 1.10. Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  sao cho  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ .  
a) Dụng  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ . Chứng minh  $O$  là trung điểm của  $AB$ .  
b) Dụng  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ . Chứng minh  $O \equiv B$ .
- 1.11. Gọi  $O$  là tâm của tam giác đều  $ABC$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ .
- 1.12. Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành  $ABCD$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ .
- 1.13. Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Trên cạnh  $AC$  lấy hai điểm  $E$  và  $F$  sao cho  $AE = EF = FC$ ;  $BE$  cắt  $AM$  tại  $N$ . Chứng minh  $\overrightarrow{NA}$  và  $\overrightarrow{NM}$  là hai vectơ đối nhau.
- 1.14. Cho hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ . Tìm điểm  $M$  thoả mãn một trong các điều kiện sau :  
a)  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$  ;      b)  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$  ;      c)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .
- 1.15. Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng nếu  $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}|$  thì tam giác  $ABC$  là tam giác vuông tại  $C$ .
- 1.16. Cho ngũ giác  $ABCDE$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DE}$ .
- 1.17. Cho ba điểm  $O, A, B$  không thẳng hàng. Với điều kiện nào thì vectơ  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  nằm trên đường phân giác của góc  $\widehat{AOB}$  ?
- 1.18. Cho hai lực  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$  có điểm đặt  $O$  và tạo với nhau góc  $60^\circ$ . Tìm cường độ tổng hợp lực của hai lực ấy biết rằng cường độ của hai lực  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$  đều là  $100\text{ N}$ .
- 1.19. Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $O$  là một điểm bất kì trên đường chéo  $AC$ . Qua  $O$  kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của hình bình hành. Các đường thẳng này cắt  $AB$  và  $DC$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ , cắt  $AD$  và  $BC$  lần lượt tại  $E$  và  $F$ . Chứng minh rằng :  
a)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$  ;      b)  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{FN}$ .

### §3. TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ

#### A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa *tích của vectơ với một số*. Cho số  $k$  và vectơ  $\vec{a}$ , dựng được vectơ  $k\vec{a}$ .
2. Các tính chất của phép nhân vectơ với một số : Với hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  tùy ý và với mọi số  $k, h \in \mathbb{R}$  ta có :
  - $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$  ;
  - $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$  ;
  - $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$  ;
  - $1.\vec{a} = \vec{a}$  ;  $(-1).\vec{a} = -\vec{a}$  ;  $0.\vec{a} = \vec{0}$  ;  $k.\vec{0} = \vec{0}$ .
3. Hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  với  $\vec{b} \neq \vec{0}$  cùng phương khi và chỉ khi có số  $k$  để  $\vec{a} = k\vec{b}$ . Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương,  $\vec{b} \neq \vec{0}$ . Ta luôn tìm được số  $k$  để  $\vec{a} = k\vec{b}$  và khi đó số  $k$  tìm được là duy nhất.
4. Áp dụng :
  - Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ , với số  $k$  xác định.
  - $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}, \forall M$ .
  - $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}, \forall M$ .
5. Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  không cùng phương và  $\vec{x}$  là một vectơ tùy ý. Bao giờ cũng tìm được cặp số  $h$  và  $k$  duy nhất sao cho  $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$ .

#### B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN



##### VẤN ĐỀ 1

Xác định vectơ  $k\vec{a}$

##### 1. Phương pháp

Dựa vào định nghĩa vectơ  $k\vec{a}$ .

- $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$

Nếu  $k > 0$ ,  $k\vec{a}$  và  $\vec{a}$  cùng hướng ;

Nếu  $k < 0$ ,  $k\vec{a}$  và  $\vec{a}$  ngược hướng.

- $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$ ,  $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ .

- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ ,  $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ .

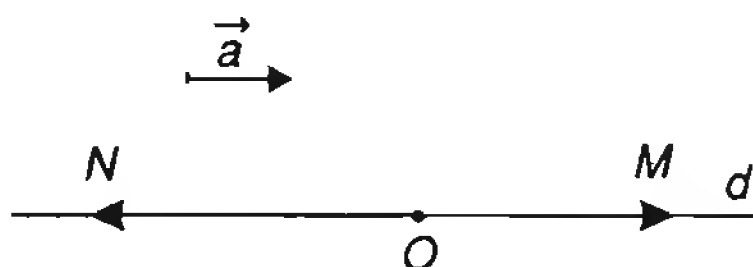
## 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Cho  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  và điểm  $O$ . Xác định hai điểm  $M$  và  $N$  sao cho  $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$ .

*GIẢI*

Vẽ đường thẳng  $d$  đi qua  $O$  và song song với giá của  $\vec{a}$ . (Nếu  $O$  thuộc giá của  $\vec{a}$  thì  $d$  là giá của  $\vec{a}$ ) (h.1.18).



Hình 1.18

Trên  $d$  lấy điểm  $M$  sao cho  $OM = 3|\vec{a}|$ ,  $\overrightarrow{OM}$  và  $\vec{a}$  cùng hướng khi đó  $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$ . Lấy điểm  $N$  trên  $d$  sao cho  $ON = 4|\vec{a}|$ ,  $\overrightarrow{ON}$  và  $\vec{a}$  ngược hướng, khi đó  $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$ .



**Ví dụ 2.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $M$  là một điểm trên đoạn  $AB$  sao cho  $AM = \frac{1}{5}AB$ . Tìm số  $k$  trong các đẳng thức sau :

a)  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$  ;

b)  $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$  ;

c)  $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB}$ .

*GIẢI*

(Xem h.1.19)



Hình 1.19

a)  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow |k| = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{5}$ . Vì  $\overrightarrow{AM}$  và  $\overrightarrow{AB}$  cùng hướng nên  $k = \frac{1}{5}$ .

b)  $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Rightarrow |k| = \frac{MA}{MB} = \frac{1}{4}$ . Vì  $\overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{MB}$  ngược hướng nên  $k = -\frac{1}{4}$ .

c)  $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow |k| = \frac{MA}{AB} = \frac{1}{5}$ . Vì  $\overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{AB}$  ngược hướng nên  $k = -\frac{1}{5}$ .



**Ví dụ 3.** a) Chứng minh vectơ đối của vectơ  $5\vec{a}$  là  $(-5)\vec{a}$ .

b) Tìm vectơ đối của các vectơ  $2\vec{a} + 3\vec{b}$ ,  $\vec{a} - 2\vec{b}$ .

*GIẢI*

a)  $-(5\vec{a}) = (-1).(5\vec{a}) = ((-1)5).\vec{a} = (-5).\vec{a}$

b)  $-(2\vec{a} + 3\vec{b}) = (-1).(2\vec{a} + 3\vec{b}) = (-1).(2\vec{a}) + (-1).(3\vec{b})$   
 $= (-2).\vec{a} + (-3).\vec{b} = -2\vec{a} - 3\vec{b}$ .

$-(\vec{a} - 2\vec{b}) = (-1).(\vec{a} - 2\vec{b}) = (-1).\vec{a} + 2.\vec{b} = -\vec{a} + 2\vec{b}$ .



## VẤN ĐỀ 2

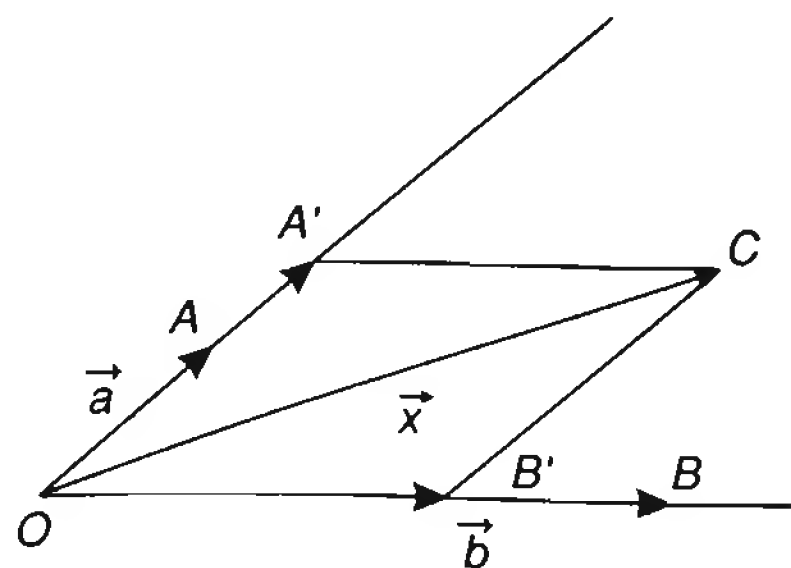
Phân tích (biểu thị) một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

### 1. Phương pháp

a) Để phân tích vectơ  $\vec{x} = \overrightarrow{OC}$  theo hai vectơ không cùng phương  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$  ta làm như sau :

- Vẽ hình bình hành  $OA'CB'$  có hai đỉnh  $O, C$  và hai cạnh  $OA'$  và  $OB'$  lần lượt nằm trên hai giá của  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  (h.1.20).

Ta có  $\vec{x} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$ .



Hình 1.20



- Xác định số  $h$  để  $\overrightarrow{OA'} = h\overrightarrow{OA}$ .

Xác định số  $k$  để  $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$ .

Khi đó  $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$ .

b) Có thể sử dụng linh hoạt các công thức sau :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ , với ba điểm  $O, A, B$  bất kì ;
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$  nếu tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.

## 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Cho các điểm  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$  và  $I$  là giao điểm của  $AD$  và  $EF$ . Đặt  $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AF}$ . Hãy phân tích các vectơ  $\overrightarrow{AI}$ ,  $\overrightarrow{AG}$ ,  $\overrightarrow{DE}$ ,  $\overrightarrow{DC}$  theo hai vectơ  $\vec{u}, \vec{v}$ .

*GIẢI*

Vì tứ giác  $AEDF$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \vec{u} + \vec{v}$  và  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$  (h.1.21).

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

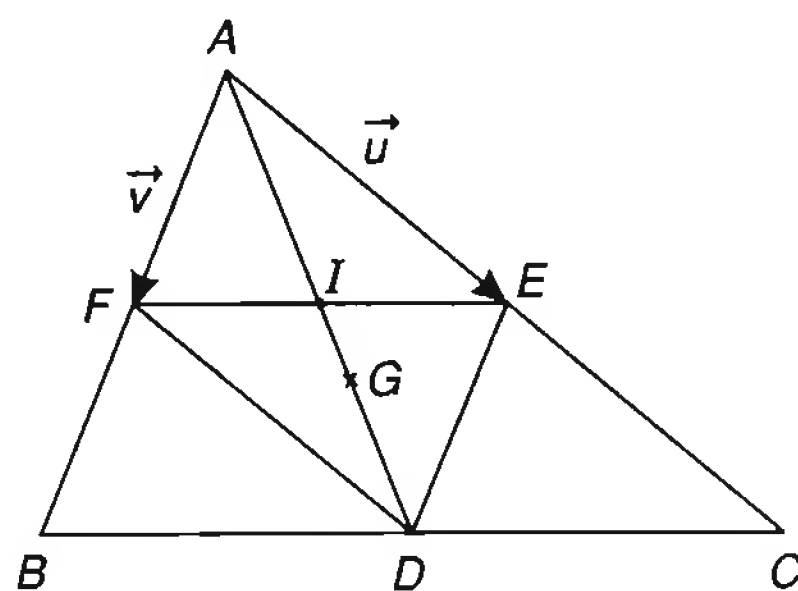
$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{AF},$$

$$\text{vậy } \overrightarrow{DE} = (-1).\vec{v} + 0.\vec{u}.$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF},$$

$$\text{vậy } \overrightarrow{DC} = \vec{u} - \vec{v}.$$



Hình 1.21



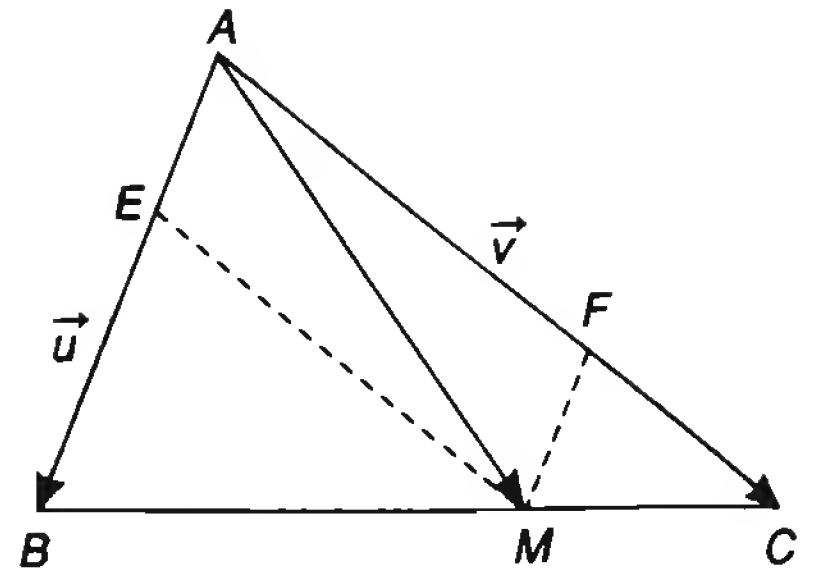
**Ví dụ 2.** Cho tam giác  $ABC$ . Điểm  $M$  trên cạnh  $BC$  sao cho  $MB = 2MC$ . Hãy phân tích vectơ  $\overrightarrow{AM}$  theo hai vectơ  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .

## GIẢI

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Vậy  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$  (h.1.22).



Hình 1.22

- Ta có thể giải bài toán bằng cách dùng định lí Ta-lét như sau :

Kẻ  $ME \parallel AC$  và  $MF \parallel AB$ , ta có  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$ . Theo định lí Ta-lét  $AE = \frac{1}{3}AB$ ,  $AF = \frac{2}{3}AC$ . Do đó  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{u}$ ,  $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\vec{v}$ .

Vậy  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$ .



### VẤN ĐỀ 3

Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song

#### 1. Phương pháp

Dựa vào các khẳng định sau :

- Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ .
- Nếu  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$  và hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  phân biệt thì  $AB \parallel CD$ .

#### 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AM$  và  $K$  là điểm trên cạnh  $AC$  sao cho  $AK = \frac{1}{3}AC$ . Chứng minh ba điểm  $B, I, K$  thẳng hàng.

*GIẢI*

Đặt  $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$  (h.1.23).

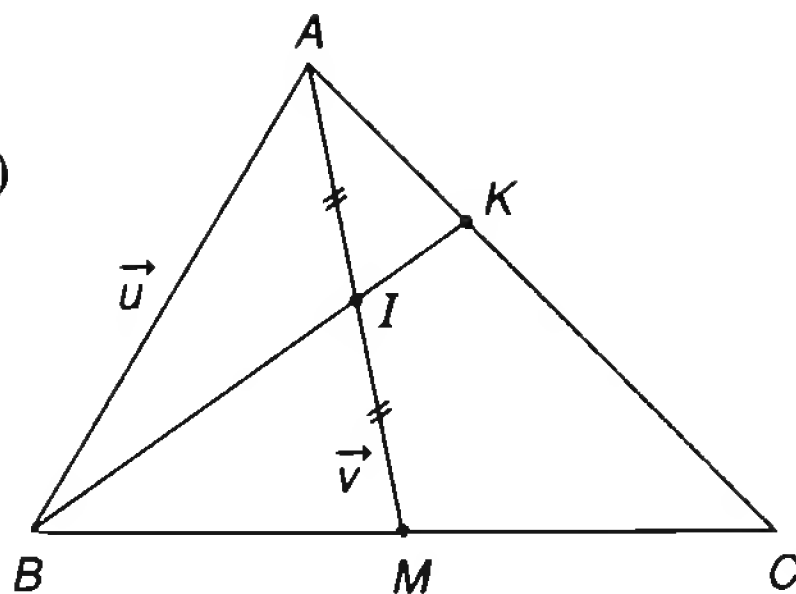
Ta phân tích  $\overrightarrow{BK}$  và  $\overrightarrow{BI}$  theo  $\vec{u}, \vec{v}$ .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BK} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \vec{u} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) \\ &= \vec{u} + \frac{1}{3}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} \quad (1)\end{aligned}$$


$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v}. \quad (2)\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra  $2\vec{u} + \vec{v} = 3\overrightarrow{BK}$ ,  $2\vec{u} + \vec{v} = 4\overrightarrow{BI}$ .

Vậy  $3\overrightarrow{BK} = 4\overrightarrow{BI}$  hay  $\overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$ . Do đó ba điểm  $B, I, K$  thẳng hàng.



Hình 1.23

 **Ví dụ 2.** Cho tam giác  $ABC$ . Hai điểm  $M, N$  được xác định bởi các hệ thức :  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ . Chứng minh  $MN \parallel AC$ .

*GIẢI*

Ta có  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ ,

hay  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}) - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC}.$$

Vậy  $\overrightarrow{MN}$  cùng phương với  $\overrightarrow{AC}$ .

Theo giả thiết ta có  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM}$ , mà  $A, B, C$  không thẳng hàng nên bốn điểm  $A, B, C, M$  là một hình bình hành.

Từ đó suy ra  $M$  không thuộc đường thẳng  $AC$  và  $MN \parallel AC$ .



## VẤN ĐỀ 4

Chứng minh các đẳng thức vectơ có chứa tích của vectơ với một số

### 1. Phương pháp

- Sử dụng tính chất tích của vectơ với một số.
- Sử dụng các tính chất của : ba điểm thẳng hàng, trung điểm của một đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác.

### 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng  $AB$  và  $CD$ . Chứng minh rằng  $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ .

*GIẢI*

Vì  $N$  là trung điểm của đoạn thẳng  $CD$  nên  $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ .

Mặt khác  $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD}$  nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \quad (\text{vì } M \text{ là trung điểm của } AB).\end{aligned}$$

Vậy  $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ .



**Ví dụ 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}.$$

*GIẢI*

Vì  $ABCD$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ . Do đó

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AC}.$$



**Ví dụ 3.** Chứng minh rằng nếu  $G$  và  $G'$  lần lượt là trọng tâm của hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  thì  $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$ .

*GIẢI*

Vì  $G'$  là trọng tâm của tam giác  $A'B'C'$  nên

$$3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'}. \quad (1)$$

Hơn nữa  $\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'}$   
 $\overrightarrow{GB'} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB'}$   
 $\overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'}.$

Cộng từng vế ba đẳng thức trên và vì  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$  nên

$$\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}.$$
 (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}.$

• Có thể chứng minh như sau

Ta có  $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'}$   
 $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'G'}$   
 $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'G'}.$

Cộng từng vế của ba đẳng thức trên và sử dụng điều kiện của trọng tâm tam giác ta suy ra điều cần chứng minh.



## VẤN ĐỀ 5

Xác định vị trí của một điểm nhờ đẳng thức vectơ

### 1. Phương pháp

Sử dụng các khẳng định và các công thức sau :

- $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A \equiv B$  ;
- Cho điểm  $A$  và cho  $\vec{a}$ . Có duy nhất điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$  ;
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow B \equiv C$ ,  $\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow A_1 \equiv A$ .

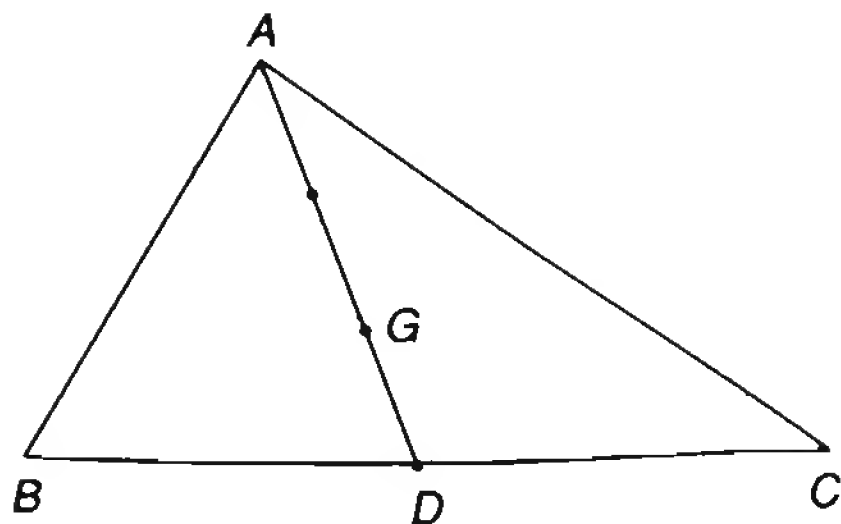
### 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$  có  $D$  là trung điểm của  $BC$ . Xác định vị trí của điểm  $G$  biết  $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GD}$ .

GIẢI

Từ  $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GD}$ , suy ra ba điểm  $A, G, D$  thẳng hàng,  $AG = 2GD$  và điểm  $G$  ở giữa  $A$  và  $D$ . Vậy  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  (h.1.24).



Hình 1.24



**Ví dụ 2.** Cho hai điểm  $A$  và  $B$ . Tìm điểm  $I$  sao cho  $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .

GIẢI

$$\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IB}.$$

Từ đó suy ra  $|\overrightarrow{IA}| = |-2\overrightarrow{IB}|$  hay  $IA = 2IB$ ,  $\overrightarrow{IA}$  và  $\overrightarrow{IB}$  ngược hướng (h.1.25).



Hình 1.25

Vậy  $I$  là điểm thuộc đoạn  $AB$  mà  $IB = \frac{1}{3}AB$ .



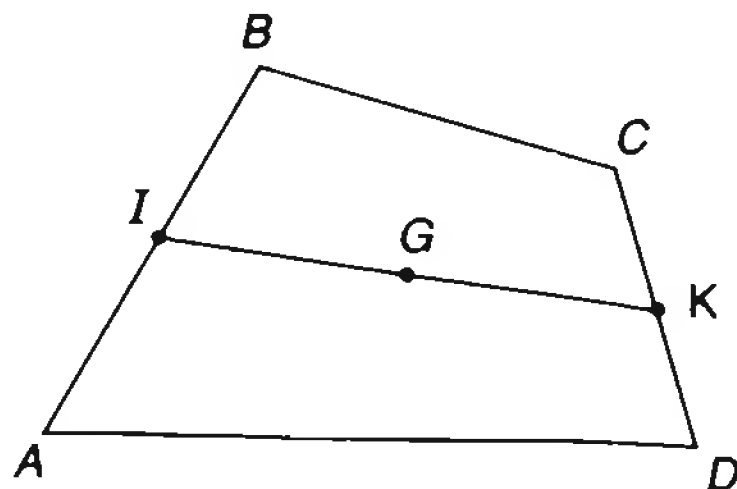
**Ví dụ 3.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Xác định vị trí điểm  $G$  sao cho

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

GIẢI

Ta có  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GI}$ , trong đó  $I$  là trung điểm của  $AB$  và  $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GK}$ , trong đó  $K$  là trung điểm của  $CD$ . Vậy theo giả thiết ta có  $2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GK} = \vec{0}$  hay  $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GK} = \vec{0}$  (h.1.26).

Do đó  $G$  là trung điểm của đoạn thẳng  $IK$ .



Hình 1.26



### C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

**1.20.** Tìm giá trị của  $m$  sao cho  $\vec{a} = m\vec{b}$  trong các trường hợp sau :

- a)  $\vec{a} = \vec{b} \neq \vec{0}$  ;
- b)  $\vec{a} = -\vec{b}$  và  $\vec{a} \neq \vec{0}$  ;
- c)  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng hướng và  $|\vec{a}| = 20, |\vec{b}| = 5$  ;
- d)  $\vec{a}, \vec{b}$  ngược hướng và  $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 15$  ;
- e)  $\vec{a} = \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$  ;
- g)  $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} = \vec{0}$  ;
- h)  $\vec{a} = \vec{0}, \vec{b} = \vec{0}$ .

**1.21.** Chứng minh rằng :

- a) Nếu  $\vec{a} = \vec{b}$  thì  $m\vec{a} = m\vec{b}$  ;
- b)  $m\vec{a} = m\vec{b}$  và  $m \neq 0$  thì  $\vec{a} = \vec{b}$  ;
- c) Nếu  $m\vec{a} = n\vec{a}$  và  $\vec{a} \neq \vec{0}$  thì  $m = n$ .

**1.22.** Chứng minh rằng tổng của  $n$  vectơ  $\vec{a}$  bằng  $n\vec{a}$  ( $n$  là số nguyên dương).

**1.23.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng nếu  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$  thì  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

**1.24.** Cho hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$ . Chứng minh rằng nếu  $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = \vec{0}$  thì hai tam giác đó có cùng trọng tâm.

**1.25.** Cho hai vectơ không cùng phương  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Dựng các vectơ :

- a)  $2\vec{a} + \vec{b}$  ;      b)  $\vec{a} - 2\vec{b}$  ;      c)  $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ .

**1.26.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$  có cạnh  $a$ .

- a) Phân tích vectơ  $\vec{AD}$  theo hai vectơ  $\vec{AB}$  và  $\vec{AF}$ .
- b) Tính độ dài của vectơ  $\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}$  theo  $a$ .

**1.27.** Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$  ( $M$  là trung điểm của  $BC$ ). Phân tích vectơ  $\vec{AM}$  theo hai vectơ  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$ .

- 1.28. Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$  và  $N$  là một điểm trên cạnh  $AC$  sao cho  $NA = 2NC$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $MN$ .  
Phân tích vectơ  $\overrightarrow{AK}$  theo  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .
- 1.29. Cho tam giác  $ABC$ . Đặt  $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CA}$ .  
a) Chứng minh rằng  $A$  là trung điểm của  $B'C'$ .  
b) Chứng minh các đường thẳng  $AA'$ ,  $BB'$  và  $CC'$  đồng quy.
- 1.30. Cho tam giác  $ABC$ . Điểm  $I$  trên cạnh  $AC$  sao cho  $CI = \frac{1}{4}CA$ ,  $J$  là điểm mà  
$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$
  
a) Chứng minh  $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ .  
b) Chứng minh  $B, I, J$  thẳng hàng.  
c) Hãy dựng điểm  $J$  thoả điều kiện đề bài.
- 1.31. Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $O$  là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng với điểm  $M$  bất kì ta có  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$ .
- 1.32. Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$ .
- 1.33. Cho tứ giác  $ABCD$ . Các điểm  $M, N, P$  và  $Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CD$  và  $DA$ . Chứng minh rằng hai tam giác  $ANP$  và  $CMQ$  có cùng trọng tâm.
- 1.34. Cho tam giác  $ABC$ .  
a) Tìm điểm  $K$  sao cho  $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB}$ .  
b) Tìm điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .
- 1.35. Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp trong đường tròn tâm  $O$ ,  $H$  là trực tâm của tam giác,  $D$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $O$ .  
a) Chứng minh tứ giác  $HCDB$  là hình bình hành.  
b) Chứng minh :  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$  ;  
$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO} ;$$
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}.$$

c) Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

Chứng minh  $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ .

Từ đó có kết luận gì về ba điểm  $O, H, G$ ?

## §4. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ

### A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa toạ độ của một điểm, độ dài đại số của một vectơ trên một trục.

2. Định nghĩa toạ độ của một vectơ, của một điểm trên mặt phẳng toạ độ  $Oxy$ .

- $\vec{a} = (a_1; a_2) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ .

- Nếu  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2)$  thì  $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$ .

- $M$  có toạ độ là  $(x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y)$  với  $O$  là gốc toạ độ;

$x = \overline{OM_1}$ ,  $y = \overline{OM_2}$ , trong đó  $M_1$  và  $M_2$  lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ  $M$  xuống  $Ox$  và  $Oy$ .

- Nếu  $A$  có toạ độ là  $(x_A; y_A)$ ,  $B$  có toạ độ là  $(x_B; y_B)$  thì

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A).$$

3. Toạ độ của  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{b}$ ,  $k\vec{a}$ .

Cho  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Ta có  $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$ ;

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2);$$

$$k\vec{a} = (ka_1; ka_2).$$

Từ đó suy ra rằng hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ( $\vec{a} \neq \vec{0}$ ) cùng phương khi và chỉ khi có số

$k$  thoả mãn  $\begin{cases} b_1 = ka_1 \\ b_2 = ka_2 \end{cases}$ .

4. Nếu  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  thì :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} ; y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Nếu  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  thì :

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} ; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

## B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN



### VẤN ĐỀ 1

Tìm tọa độ của một điểm và độ dài đại số của một vectơ trên trục  $(O; \vec{e})$

#### 1. Phương pháp

Căn cứ vào định nghĩa tọa độ của điểm và độ dài đại số của vectơ.

- Điểm  $M$  có tọa độ  $a \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = a\vec{e}$  với  $O$  là điểm gốc.
- Vectơ  $\overrightarrow{AB}$  có độ dài đại số là  $m = \overline{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = m\vec{e}$ .
- Nếu  $M$  và  $N$  có tọa độ lần lượt là  $a$  và  $b$  thì  $\overline{MN} = b - a$ .

#### 2. Các ví dụ

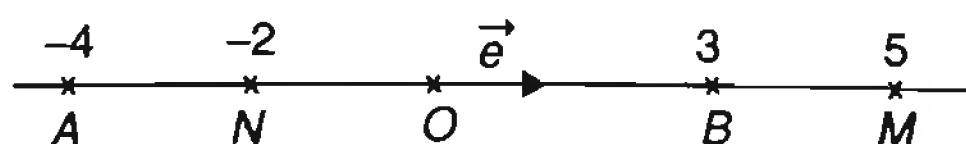


**Ví dụ 1.** Trên trục  $(O; \vec{e})$  cho các điểm  $A, B, M, N$  lần lượt có tọa độ là  $-4; 3; 5; -2$ .

- Biểu diễn các điểm đã cho trên trục ;
- Tính độ dài đại số của các vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MN}$ .

**GIẢI**

- Biểu diễn các điểm  $A, B, M, N$  như sau :



Hình 1.27

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \overline{AB} &= 3 - (-4) = 7 \\ \overline{AM} &= 5 - (-4) = 9 \\ \overline{MN} &= -2 - 5 = -7. \end{aligned}$$



**Ví dụ 2.** Cho ba điểm tùy ý  $A, B, C$  trên trục  $(O; \vec{e})$ . Chứng minh rằng :

- a)  $\overline{AB} = AB$  nếu  $\overrightarrow{AB}$  cùng hướng với  $\vec{e}$  ;  
 $\overline{AB} = -AB$  nếu  $\overrightarrow{AB}$  ngược hướng với  $\vec{e}$ .  
b)  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ .

*GIẢI*

- a)  $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{e}$ . Từ đó suy ra :

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overline{AB}| \cdot |\vec{e}| \text{ hay } |\overline{AB}| = AB.$$

Nếu  $\overrightarrow{AB}$  cùng hướng với  $\vec{e}$  thì  $\overline{AB} > 0$ , nên ta có  $\overline{AB} = AB$ . Nếu  $\overrightarrow{AB}$  ngược hướng với  $\vec{e}$  thì  $\overline{AB} < 0$ , nên ta có  $\overline{AB} = -AB$ .

- b) Với ba điểm  $A, B, C$  ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ . Vì  $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{e}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \overline{BC} \cdot \vec{e}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \overline{AC} \cdot \vec{e}$  nên ta có :

$$\overline{AB} \cdot \vec{e} + \overline{BC} \cdot \vec{e} = \overline{AC} \cdot \vec{e} \text{ hay } (\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \vec{e} = \overline{AC} \cdot \vec{e}.$$

Suy ra  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ .



**Chú ý :** Hệ thức  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$  gọi là hệ thức Sa-lơ.



## **VẤN ĐỀ 2**

Xác định toạ độ của vectơ và của một điểm trên mặt phẳng toạ độ  $Oxy$

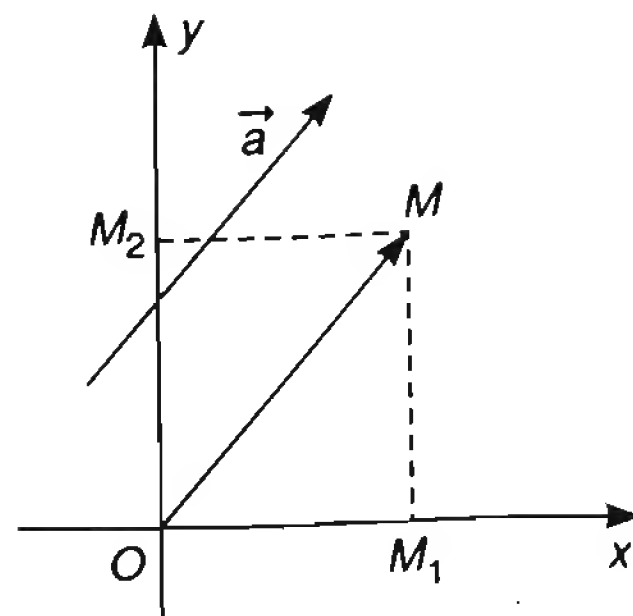
### **1. Phương pháp**

Căn cứ vào định nghĩa toạ độ của một vectơ và toạ độ của một điểm trên mặt phẳng toạ độ  $Oxy$ .

- Để tìm toạ độ của vectơ  $\vec{a}$  ta làm như sau :

Vẽ vectơ  $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ .

Gọi hai điểm  $M_1$  và  $M_2$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên  $Ox$  và  $Oy$ . Khi đó  $\vec{a} = (a_1; a_2)$  trong đó  $a_1 = \overline{OM_1}$ ,  $a_2 = \overline{OM_2}$  (h.1.28).



Hình 1.28

- Để tìm toạ độ của điểm  $A$  ta tìm toạ độ của vectơ  $\overrightarrow{OA}$ . Như vậy  $A$  có toạ độ là  $(x; y)$  trong đó  $x = \overline{OA_1}$ ,  $y = \overline{OA_2}$ ;  $A_1$  và  $A_2$  tương ứng là chân đường vuông góc hạ từ  $A$  xuống  $Ox$  và  $Oy$ .

- Nếu biết toạ độ của hai điểm  $A, B$  ta tính được toạ độ của vectơ  $\overrightarrow{AB}$  theo công thức :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A).$$

## 2. Các ví dụ



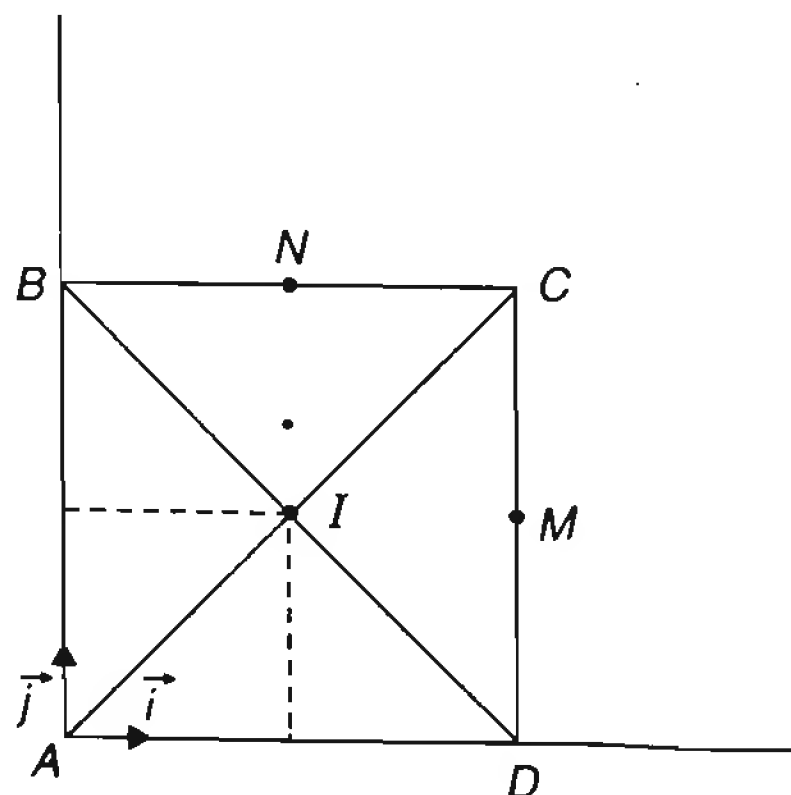
**Ví dụ 1.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $a = 5$ . Chọn hệ trục toạ độ  $(A; \vec{i}, \vec{j})$ , trong đó  $\vec{i}$  và  $\overrightarrow{AD}$  cùng hướng,  $\vec{j}$  và  $\overrightarrow{AB}$  cùng hướng. Tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông, giao điểm  $I$  của hai đường chéo, trung điểm  $N$  của  $BC$  và trung điểm  $M$  của  $CD$ .

*GIẢI*

Ta có  $A(0; 0), B(0; 5), C(5; 5),$

$$D(5; 0), I\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right), N\left(\frac{5}{2}; 5\right),$$

$$M\left(5; \frac{5}{2}\right) \text{ (h.1.29).}$$



Hình 1.29



**Ví dụ 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AD = 4$  và chiều cao ứng với cạnh  $AD$  bằng 3, góc  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Chọn hệ trục tọa độ  $(A; \vec{i}, \vec{j})$  sao cho  $\vec{i}$  và  $\overrightarrow{AD}$  cùng hướng. Tìm tọa độ của các vectơ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .

*GIẢI*

Kẻ  $BH \perp AD$ , ta có  $BH = 3$ ,  $AB = 2\sqrt{3}$ ,  $AH = \sqrt{3}$  (h.1.30)..

Do đó ta có các tọa độ :  $A(0; 0)$ ,

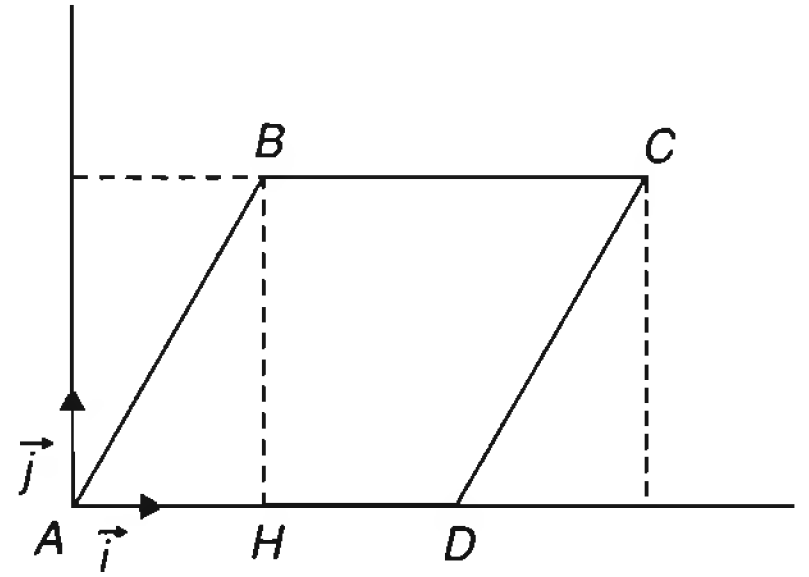
$B(\sqrt{3}; 3)$ ,  $C(4 + \sqrt{3}; 3)$ ,  $D(4; 0)$ .

Từ đó có  $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{3}; 3)$

$$\overrightarrow{BC} = (4; 0)$$

$$\overrightarrow{CD} = (-\sqrt{3}; -3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (4 + \sqrt{3}; 3).$$



Hình 1.30



**Ví dụ 3.** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M(1; 0)$ ,  $N(2; 2)$  và  $P(-1; 3)$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $BC$ ,  $CA$  và  $AB$ . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

*GIẢI*

Ta có :  $NAPM$  là hình bình hành

suy ra  $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MP}$  (h.1.31).

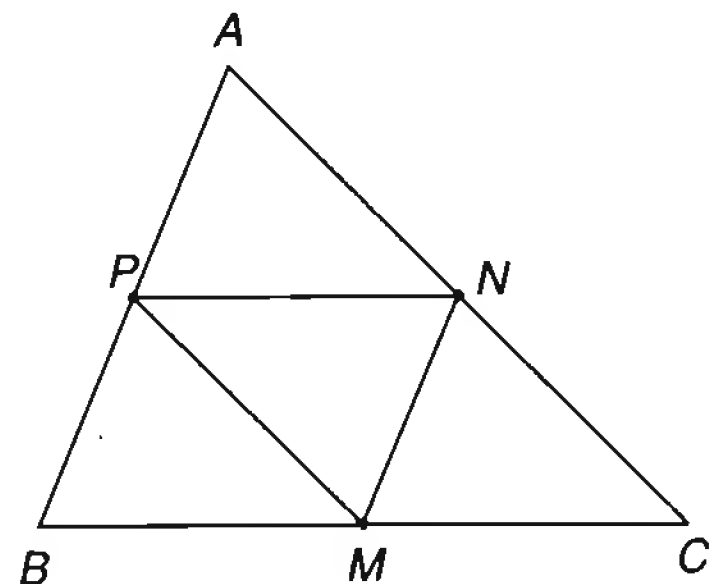
$$\overrightarrow{NA} = (x_A - 2; y_A - 2)$$

$$\overrightarrow{MP} = (-2; 3).$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x_A - 2 = -2 \\ y_A - 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 5. \end{cases}$$

Vậy tọa độ của  $A$  là  $(0; 5)$ .

Tương tự, từ  $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{PN}$ ,  $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NP}$  ta tính được  $B(-2; 1)$ ,  $C(4; -1)$ .



Hình 1.31



**Ví dụ 4.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $A(-1; 3)$ ,  $B(2; 4)$ ,  $C(0; 1)$ . Tìm tọa độ đỉnh  $D$ .

### GIẢI

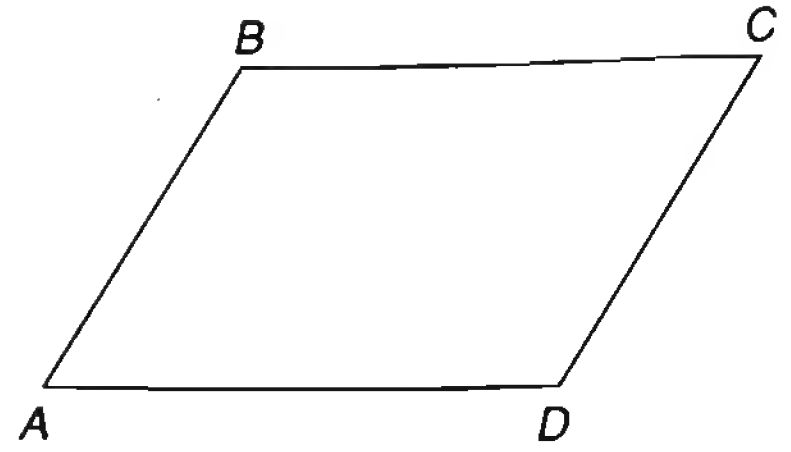
Giả sử  $D = (x_D; y_D)$ .

Ta có  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{AD} = (x_D + 1; y_D - 3)$ ,

$\overrightarrow{BC} = (-2; -3)$  (h.1.32). Do đó.

$$\begin{cases} x_D + 1 = -2 \\ y_D - 3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -3 \\ y_D = 0. \end{cases}$$

Vậy tọa độ đỉnh  $D$  là  $(-3; 0)$ .



Hình 1.32



### VẤN ĐỀ 3

Tìm tọa độ của các vectơ  $\vec{u} + \vec{v}$ ,  $\vec{u} - \vec{v}$ ,  $k\vec{u}$ .

#### 1. Phương pháp

Tính theo các công thức tọa độ của  $\vec{u} + \vec{v}$ ,  $\vec{u} - \vec{v}$ ,  $k\vec{u}$ .

#### 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Cho  $\vec{u} = (3; -2)$ ,  $\vec{v} = (7; 4)$ .

Tính tọa độ của các vectơ  $\vec{u} + \vec{v}$ ,  $\vec{u} - \vec{v}$ ,  $2\vec{u}$ ,  $3\vec{u} - 4\vec{v}$ ,  $-(3\vec{u} - 4\vec{v})$ .

### GIẢI

$$\vec{u} + \vec{v} = (10; 2), \vec{u} - \vec{v} = (-4; -6), 2\vec{u} = (6; -4)$$

$$3\vec{u} = (9; -6), 4\vec{v} = (28; 16).$$

$$\text{Vậy } 3\vec{u} - 4\vec{v} = (-19; -22) \text{ và } -(3\vec{u} - 4\vec{v}) = (19; 22).$$



**Ví dụ 2.** Tìm  $x$  để các cặp vectơ sau cùng phương :

a)  $\vec{a} = (2; 3)$ ,  $\vec{b} = (4; x)$

b)  $\vec{u} = (0; 5)$ ,  $\vec{v} = (x; 7)$

c)  $\vec{m} = (x; -3)$ ,  $\vec{n} = (-2; 2x)$ .



### GIẢI

a)  $\frac{4}{2} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 6.$

b)  $x = 0.$

c)  $\frac{x}{-2} = \frac{-3}{2x} \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}.$



## VẤN ĐỀ 4

Chứng minh ba điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song bằng tọa độ

### 1. Phương pháp

Sử dụng các điều kiện cần và đủ sau :

- Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$  ;
- Hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$  cùng phương  $\Leftrightarrow$  Có số  $k$  để  $\vec{a} = k\vec{b}$ .

### 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Cho ba điểm  $A(-1 ; 1), B(1 ; 3), C(-2 ; 0)$ . Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.

### GIẢI

$$\overrightarrow{AB} = (2 ; 2), \overrightarrow{AC} = (-1 ; -1).$$

Vậy  $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$ . Do đó ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.



**Ví dụ 2.** Cho  $A(3 ; 4), B(2 ; 5)$ . Tìm  $x$  để điểm  $C(-7 ; x)$  thuộc đường thẳng  $AB$ .

### GIẢI

Điểm  $C$  thuộc đường thẳng  $AB$  khi và chỉ khi : ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng  
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}.$

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-1 ; 1), \overrightarrow{AC} = (-10 ; x - 4).$

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{-10}{-1} = \frac{x-4}{1} \Rightarrow x - 4 = 10 \Rightarrow x = 14.$$



**Ví dụ 3.** Cho bốn điểm  $A(0 ; 1)$ ,  $B(1 ; 3)$ ,  $C(2 ; 7)$ ,  $D(0 ; 3)$ . Chứng minh hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  song song.

*GIẢI*

$\overrightarrow{AB} = (1 ; 2)$ ,  $\overrightarrow{CD} = (-2 ; -4)$ . Vậy  $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$ . Do đó hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  song song hoặc trùng nhau.

Ta có  $\overrightarrow{AC} = (2 ; 6)$ , mà  $\overrightarrow{AB} = (1 ; 2)$ . Vậy hai vectơ  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{AB}$  không cùng phương. Do đó điểm  $C$  không thuộc đường thẳng  $AB$ . Vậy  $AB \parallel CD$ .



## VẤN ĐỀ 5

Tính tọa độ trung điểm của một đoạn thẳng, tọa độ của trọng tâm một tam giác

### 1. Phương pháp

Sử dụng các công thức sau :

- Tọa độ trung điểm của một đoạn thẳng bằng trung bình cộng các tọa độ tương ứng của hai đầu mút.
- Tọa độ của trọng tâm tam giác bằng trung bình cộng các tọa độ tương ứng của ba đỉnh.

### 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$  với  $A(3 ; 2)$ ,  $B(-11 ; 0)$ ,  $C(5 ; 4)$ . Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác.

*GIẢI*

Theo công thức tọa độ của trọng tâm tam giác ta có

$$x_G = \frac{3 - 11 + 5}{3} = -1, y_G = \frac{2 + 0 + 4}{3} = 2.$$



**Ví dụ 2.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1 ; -1)$ ,  $B(5 ; -3)$  đỉnh  $C$  trên  $Oy$  và trọng tâm  $G$  trên  $Ox$ . Tìm tọa độ của  $C$ .

*GIẢI*

Vì  $C$  nằm trên  $Oy$  nên ta có  $C(0 ; y)$ . Vì trọng tâm  $G$  nằm trên  $Ox$  nên ta có  $G(x ; 0)$ . Theo công thức tọa độ của trọng tâm tam giác ta có

$$y_G = \frac{-1-3+y}{3} = 0 \Rightarrow y = 4.$$

Vậy  $C$  có tọa độ là  $(0 ; 4)$ .



**Ví dụ 3.** Cho  $A(-2 ; 1)$ ,  $B(4 ; 5)$ . Tìm tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AB$  và tìm tọa độ điểm  $C$  sao cho tứ giác  $OACB$  là hình bình hành,  $O$  là gốc tọa độ.

*GIẢI*

Theo công thức tọa độ trung điểm ta có

$$x_I = \frac{-2+4}{2} = 1 ; \quad y_I = \frac{1+5}{2} = 3.$$

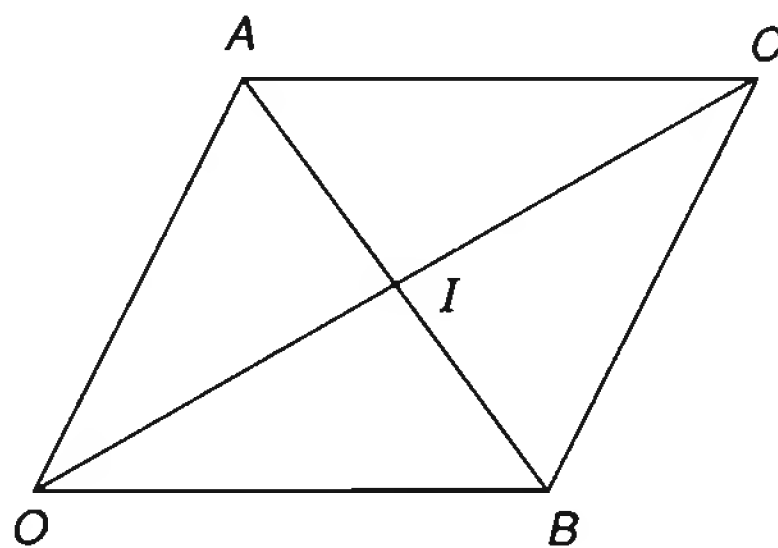
Vậy tọa độ  $I$  là  $(1 ; 3)$  (h.1.33).

Tứ giác  $OACB$  là hình bình hành khi và chỉ khi  $I$  là trung điểm của  $OC$ . Do đó

$$\frac{x_C + 0}{2} = 1 \Rightarrow x_C = 2.$$

$$\frac{y_C + 0}{2} = 3 \Rightarrow y_C = 6.$$

Vậy tọa độ  $C$  là  $(2 ; 6)$ .



Hình 1.33

## C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

**1.36.** Viết tọa độ của các vectơ sau :

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} ; \quad \vec{b} = \frac{1}{3}\vec{i} - 5\vec{j} ; \quad \vec{c} = 3\vec{i} ; \quad \vec{d} = -2\vec{j}.$$

**1.37.** Viết vectơ  $\vec{u}$  dưới dạng  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  khi biết tọa độ của  $\vec{u}$  là :

$(2 ; -3)$  ,  $(-1 ; 4)$ ,  $(2 ; 0)$ ,  $(0 ; -1)$ ,  $(0 ; 0)$ .

- 1.38. Cho  $\vec{a} = (1; -2)$ ,  $\vec{b} = (0; 3)$ . Tìm tọa độ của các vector  $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$ ,  $\vec{z} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ .
- 1.39. Xét xem các cặp vector sau có cùng phương không? Trong trường hợp cùng phương thì xét xem chúng cùng hướng hay ngược hướng.
- a)  $\vec{a} = (2; 3)$ ,  $\vec{b} = (-10; -15)$ .                      b)  $\vec{u} = (0; 7)$ ,  $\vec{v} = (0; 8)$ .
- c)  $\vec{m} = (-2; 1)$ ,  $\vec{n} = (-6; 3)$ .                      d)  $\vec{c} = (3; 4)$ ,  $\vec{d} = (6; 9)$ .
- e)  $\vec{e} = (0; 5)$ ,  $\vec{f} = (3; 0)$ .
- 1.40. a) Cho  $A(-1; 8)$ ,  $B(1; 6)$ ,  $C(3; 4)$ . Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.  
b) Cho  $A(1; 1)$ ,  $B(3; 2)$  và  $C(m + 4; 2m + 1)$ . Tìm  $m$  để ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.
- 1.41. Cho bốn điểm  $A(-2; -3)$ ,  $B(3; 7)$ ,  $C(0; 3)$ ,  $D(-4; -5)$ .  
Chứng minh rằng hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  song song với nhau.
- 1.42. Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M(1; 1)$ ,  $N(2; 3)$ ,  $P(0; -4)$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $BC, CA, AB$ . Tính tọa độ các đỉnh của tam giác.
- 1.43. Cho hình bình hành  $ABCD$ . Biết  $A(2; -3)$ ,  $B(4; 5)$ ,  $C(0; -1)$ . Tính tọa độ của đỉnh  $D$ .
- 1.44. Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-5; 6)$ ,  $B(-4; -1)$ ,  $C(4; 3)$ . Tìm tọa độ trung điểm  $I$  của  $AC$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.
- 1.45. Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-3; 6)$ ,  $B(9; -10)$ ,  $C(-5; 4)$ .  
a) Tìm tọa độ của trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .  
b) Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $BGCD$  là hình bình hành.
- 1.46. Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ . Chọn hệ tọa độ  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , trong đó  $O$  là trung điểm của cạnh  $BC$ ,  $\vec{i}$  cùng hướng với  $\vec{OC}$ ,  $\vec{j}$  cùng hướng với  $\vec{OA}$ .  
a) Tính tọa độ của các đỉnh của tam giác  $ABC$ .  
b) Tìm tọa độ trung điểm  $E$  của  $AC$ .  
c) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .
- 1.47. Cho lục giác đều  $ABCDEF$ . Chọn hệ tọa độ  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , trong đó  $O$  là tâm của lục giác đều, hai vector  $\vec{i}$  và  $\vec{OD}$  cùng hướng,  $\vec{j}$  và  $\vec{EC}$  cùng hướng. Tính tọa độ các đỉnh của lục giác biết độ dài cạnh của lục giác là 6.

## CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

- 1.48.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Dựa vào các điểm  $A, B, C, D, O, M, N$  đã cho hãy :
- Kể tên hai vectơ cùng phương với  $\overrightarrow{AB}$ , hai vectơ cùng hướng với  $\overrightarrow{AB}$ , hai vectơ ngược hướng với  $\overrightarrow{AB}$  (các vectơ kể ra này đều khác  $\vec{0}$ ).
  - Chỉ ra một vectơ bằng vectơ  $\overrightarrow{MO}$ , một vectơ bằng vectơ  $\overrightarrow{OB}$ .
- 1.49.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $E$  và  $F$  lần lượt là trung điểm của hai cạnh  $AB$  và  $CD$ . Nối  $AF$  và  $CE$ , hai đường này cắt đường chéo  $BD$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ . Chứng minh  $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$ .
- 1.50.** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  với  $A, D, F$  không thẳng hàng. Dụng các vectơ  $\overrightarrow{EH}$  và  $\overrightarrow{FG}$  bằng vectơ  $\overrightarrow{AD}$ . Chứng minh tứ giác  $CDGH$  là hình bình hành.
- 1.51.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$ . Tìm các vectơ :
- $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$  ;
  - $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$ .
- 1.52.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  và  $M$  là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng :
- $$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF}.$$
- 1.53.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm điểm  $M$  thoả mãn điều kiện  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .
- 1.54.** Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Trên cạnh  $AC$  lấy hai điểm  $E$  và  $F$  sao cho  $AE = EF = FC$ ,  $BE$  cắt trung tuyến  $AM$  tại  $N$ . Tính  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MN}$ .
- 1.55.** Cho hai điểm  $A$  và  $B$ . Điểm  $M$  thoả mãn điều kiện  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ . Chứng minh rằng  $OM = \frac{1}{2}AB$ , trong đó  $O$  là trung điểm của  $AB$ .
- 1.56.** Cho tam giác  $ABC$  và một điểm  $M$  tùy ý. Chứng minh rằng vectơ  $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$  không phụ thuộc vào vị trí của điểm  $M$ . Hãy dụng điểm  $D$  sao cho  $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$ .

- 1.57.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  là những điểm được xác định như sau :
- $$\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \quad \overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{NA}, \quad \overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{PB}.$$
- a) Chứng minh  $2\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$  với mọi điểm  $O$ .  
b) Chứng minh hai tam giác  $ABC$  và  $MNP$  có cùng trọng tâm.
- 1.58.** Cho hình vuông  $ABCD$ ,  $E$  là trung điểm của  $CD$ . Hãy phân tích  $\overrightarrow{AE}$  theo hai vectơ  $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ .
- 1.59.** Cho các điểm  $A, B, C$  trên trục  $(O ; \vec{e})$  có tọa độ lần lượt là  $5 ; -3 ; -4$ . Tính độ dài đại số của  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ .
- 1.60.** Cho hình thoi  $ABCD$  tâm  $O$  có  $AC = 8$ ,  $BD = 6$ . Chọn hệ tọa độ  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  sao cho  $\vec{i}$  và  $\overrightarrow{OC}$  cùng hướng,  $\vec{j}$  và  $\overrightarrow{OB}$  cùng hướng.
- a) Tính tọa độ các đỉnh của hình thoi ;  
b) Tìm tọa độ trung điểm  $I$  của  $BC$  và trọng tâm của tam giác  $ABC$  ;  
c) Tìm tọa độ điểm đối xứng  $I'$  của  $I$  qua tâm  $O$ . Chứng minh  $A, I', D$  thẳng hàng ;  
d) Tìm tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{BD}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ .

## CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

- 1.61.** Chọn khẳng định đúng :
- (A) Hai vectơ có giá vuông góc thì cùng phương ;
  - (B) Hai vectơ cùng phương thì giá của chúng song song ;
  - (C) Hai vectơ cùng phương thì cùng hướng ;
  - (D) Hai vectơ cùng ngược hướng với vectơ thứ ba thì cùng hướng.
- 1.62.** Nếu hai vectơ bằng nhau thì chúng
- (A) có độ dài bằng nhau ;
  - (B) cùng phương ;
  - (C) cùng điểm gốc ;
  - (D) cùng hướng.
- Hãy tìm khẳng định sai.
- 1.63.** Số các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là 2 trong 6 điểm phân biệt cho trước là
- (A) 12 ;
  - (B) 21 ;
  - (C) 27 ;
  - (D) 30.

- 1.64.** Số các vectơ có điểm đầu là một trong 5 điểm phân biệt cho trước và có điểm cuối là một trong 4 điểm phân biệt cho trước là  
 (A) 20 ;            (B) 10 ;            (C) 9 ;            (D) 14.
- 1.65.** Chọn khẳng định đúng trong các hệ thức sau :  
 (A)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$  ;            (B)  $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NP}$  ;  
 (C)  $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$  ;            (D)  $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$ .
- 1.66.** Cộng các vectơ có cùng độ dài bằng 5 và cùng giá ta được kết quả sau :  
 (A) Cộng 5 vectơ ta được kết quả là  $\vec{0}$  ;  
 (B) Cộng 4 vectơ đôi một ngược hướng ta được  $\vec{0}$  ;  
 (C) Cộng 121 vectơ ta được  $\vec{0}$  ;  
 (D) Cộng 25 vectơ ta được vectơ có độ dài là 10.  
 Hãy chọn khẳng định đúng.
- 1.67.** Chọn đẳng thức đúng :  
 (A)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$  ;            (B)  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$  ;  
 (C)  $\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NM}$  ;            (D)  $\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$ .
- 1.68.** Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là các vectơ khác  $\vec{0}$  và  $\vec{a}$  là vectơ đối của  $\vec{b}$  thì chúng  
 (A) cùng phương ;            (B) cùng độ dài ;  
 (C) ngược hướng ;            (D) có chung điểm đầu.  
 Hãy chọn khẳng định sai.
- 1.69.** Vectơ tổng  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$  bằng  
 (A)  $\overrightarrow{MR}$  ;            (B)  $\overrightarrow{MN}$  ;            (C)  $\overrightarrow{PR}$  ;            (D)  $\overrightarrow{MP}$ .
- 1.70.** Cho tam giác đều  $ABC$ . Hãy chọn đẳng thức đúng  
 (A)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$  ;            (B)  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$  ;  
 (C)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$  ;            (D)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ .
- 1.71.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau :  
 (A)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$  ;            (B)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$  ;  
 (C)  $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BO}$  ;            (D)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CB}$ .

- 1.72. Cho  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Hãy chọn đẳng thức đúng :
- (A)  $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$  ;
- (B)  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$  ;
- (C)  $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$  ;
- (D)  $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ .
- 1.73. Cho tam giác  $ABC$ ,  $E$  là điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $BE = \frac{1}{4}BC$ . Hãy chọn đẳng thức đúng :
- (A)  $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$  ;
- (B)  $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$  ;
- (C)  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$  ;
- (D)  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ .
- 1.74. Cho tam giác  $ABC$  và  $I$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Điểm  $G$  có tính chất nào sau đây thì  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  :
- (A)  $GA = 2GI$  ;
- (B)  $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$  ;
- (C)  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$  ;
- (D)  $GI = \frac{1}{3}AI$  ?
- 1.75. Cho  $\vec{a} = (1 ; 2)$ ,  $\vec{b} = (2 ; 3)$ ,  $\vec{c} = (-6 ; -10)$ . Hãy chọn đẳng thức đúng :
- (A)  $\vec{a} + \vec{b}$  và  $\vec{c}$  cùng hướng ;
- (B)  $\vec{a} + \vec{b}$  và  $\vec{a} - \vec{b}$  cùng phương ;
- (C)  $\vec{a} - \vec{b}$  và  $\vec{c}$  cùng hướng ;
- (D)  $\vec{a} + \vec{b}$  và  $\vec{c}$  ngược hướng.



- 1.76.** Cho ba điểm  $A(0 ; 3)$ ,  $B(1 ; 5)$ ,  $C(-3 ; -3)$ . Chọn khẳng định đúng.
- (A)  $A, B, C$  không thẳng hàng ;  
 (B)  $A, B, C$  thẳng hàng ;  
 (C) Điểm  $B$  ở giữa  $A$  và  $C$  ;  
 (D)  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng hướng.
- 1.77.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1 ; -3)$ ,  $B(2 ; 5)$ ,  $C(0 ; 7)$ . Trọng tâm của tam giác  $ABC$  là điểm có toạ độ :
- (A)  $(0 ; 5)$  ;  
 (B)  $(1 ; \sqrt{2})$  ;  
 (C)  $(3 ; 0)$  ;  
 (D)  $(1 ; 3)$ .
- 1.78.** Cho hai điểm  $A(3 ; -5)$ ,  $B(1 ; 7)$ . Chọn khẳng định đúng :
- (A) Trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là điểm  $(4 ; 2)$  ;  
 (B) Toạ độ của vectơ  $\overrightarrow{AB}$  là  $(2 ; -12)$  ;  
 (C) Toạ độ của vectơ  $\overrightarrow{AB}$  là  $(-2 ; 12)$  ;  
 (D) Trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là điểm  $(2 ; -1)$ .
- 1.79.** Cho  $\vec{a} = (2 ; -4)$ ,  $\vec{b} = (-5 ; 3)$ . Toạ độ của vectơ  $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$  là
- (A)  $\vec{u} = (7 ; -7)$  ;  
 (B)  $\vec{u} = (9 ; -11)$  ;  
 (C)  $\vec{u} = (9 ; 5)$  ;  
 (D)  $\vec{u} = (-1 ; 5)$ .
- 1.80.** Cho  $M(1 ; -1)$ ,  $N(3 ; 2)$ ,  $P(0 ; -5)$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $BC$ ,  $CA$  và  $AB$  của tam giác  $ABC$ . Toạ độ của điểm  $A$  là
- (A)  $(2 ; -2)$  ; (B)  $(5 ; 1)$  ;  
 (C)  $(\sqrt{5} ; 0)$  ; (D)  $(2 ; \sqrt{2})$ .
- 1.81.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $A(-2 ; 3)$ ,  $B(0 ; 4)$ ,  $C(5 ; -4)$ . Toạ độ đỉnh  $D$  là
- (A)  $(\sqrt{7} ; 2)$  ; (B)  $(3 ; -5)$  ;  
 (C)  $(3 ; 7)$  ; (D)  $(3 ; \sqrt{2})$ .

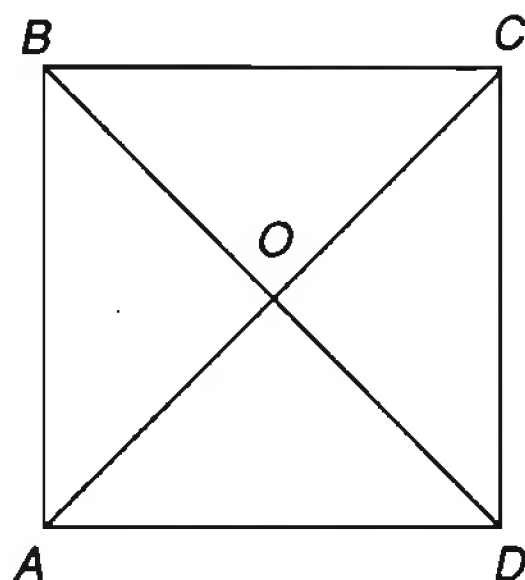
- 1.82. Cho  $M(5 ; -3)$ . Kẻ  $MM_1$  vuông góc với  $Ox$ ,  $MM_2$  vuông góc với  $Oy$ . Khẳng định nào đúng ?
- (A)  $\overline{OM_1} = -5$  ;
- (B)  $\overline{OM_2} = 3$  ;
- (C)  $\overline{OM_1} - \overline{OM_2}$  có toạ độ  $(-5 ; 3)$  ;
- (D)  $\overline{OM_1} + \overline{OM_2}$  có toạ độ  $(5 ; -3)$ .
- 1.83. Cho bốn điểm  $A(0 ; 1)$ ,  $B(-1 ; -2)$ ,  $C(1 ; 5)$ ,  $D(-1 ; -1)$ . Khẳng định nào đúng ?
- (A) Ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng ;
- (B) Hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  song song ;
- (C) Ba điểm  $A, B, D$  thẳng hàng ;
- (D) Hai đường thẳng  $AD$  và  $BC$  song song.
- 1.84.  $\vec{i}$  và  $\vec{j}$  là hai vectơ đơn vị của hệ trục toạ độ  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ . Toạ độ của vectơ  $2\vec{i} + \vec{j}$  là
- (A)  $(1 ; -2)$  ;
- (B)  $(-3 ; 4)$  ;
- (C)  $(2 ; 1)$  ;
- (D)  $(0 ; \sqrt{3})$ .
- 1.85. Cho tam giác  $ABC$  trọng tâm là gốc toạ độ, biết toạ độ hai đỉnh là  $A(-3 ; 5)$ ,  $B(0 ; 4)$ . Toạ độ của đỉnh  $C$  là
- (A)  $(-5 ; 1)$  ;
- (B)  $(3 ; 7)$  ;
- (C)  $(3 ; -9)$  ;
- (D)  $(\sqrt{5} ; 0)$ .

# HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

## §1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

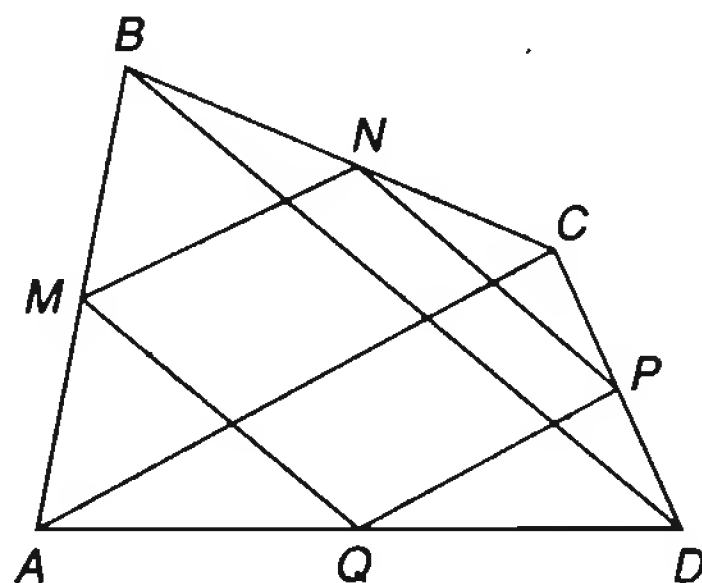
- 1.1. a) Với hai điểm  $A, B$  có hai vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$  ;  
 b) Với ba điểm  $A, B, C$  có 6 vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$  ;  
 c) Với bốn điểm  $A, B, C, D$  có 12 vectơ (học sinh tự liệt kê).

- 1.2.  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA},$   
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD},$   
 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}, \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD},$   
 $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA}$  (h.1.34).



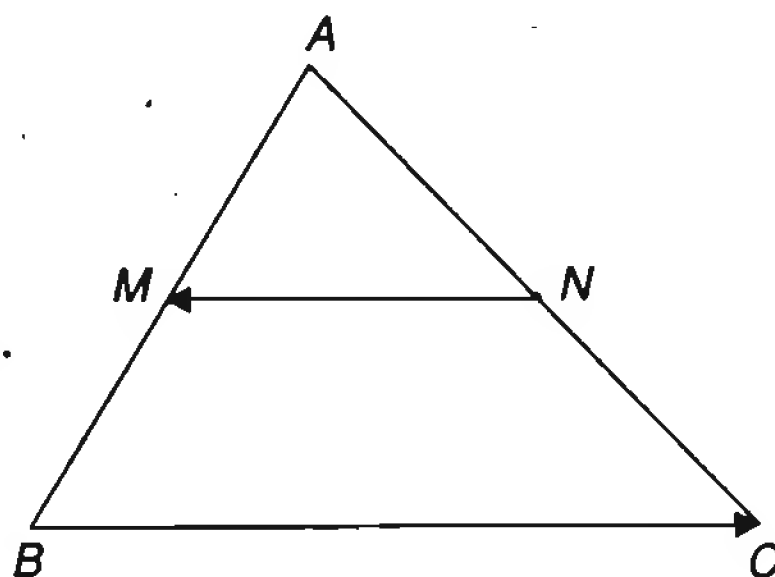
Hình 1.34

- 1.3.  $MN = PQ$  và  $MN \parallel PQ$  vì chúng đều bằng  $\frac{1}{2}AC$  và đều song song với  $AC$  (h.1.35).  
 Vậy tứ giác  $MNPQ$  là hình bình hành nên ta có  
 $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NM}.$



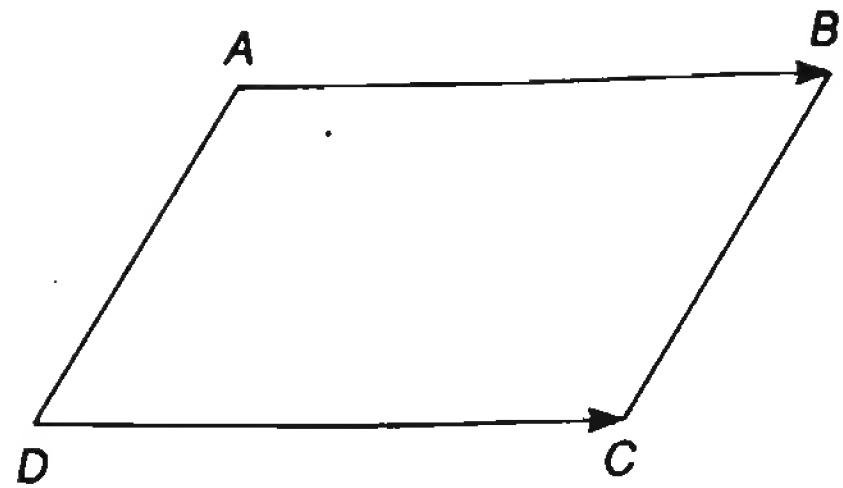
Hình 1.35

- 1.4.  $MN \parallel BC$  và  $MN = \frac{1}{2}BC,$   
 hay  $|\overrightarrow{NM}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$  (h.1.36).  
 Vì  $MN \parallel BC$  nên  $\overrightarrow{NM}$  và  $\overrightarrow{BC}$  cùng phương.



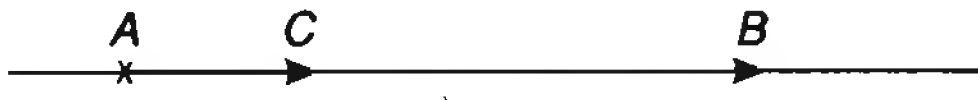
Hình 1.36

1.5. Tứ giác  $ABCD$  có  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  nên  $AB = DC$  và  $AB \parallel DC$ . Do đó  $ABCD$  là hình bình hành, suy ra :  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  (h.1.37).



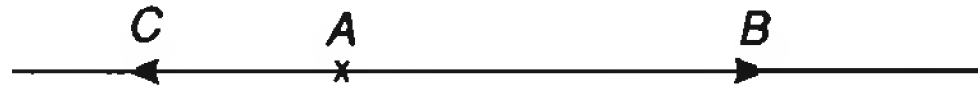
Hình 1.37

1.6. a) Nếu  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng hướng và  $|\overrightarrow{AB}| > |\overrightarrow{AC}|$  thì điểm  $C$  nằm giữa hai điểm  $A$  và  $B$  (h.1.38) :



Hình 1.38

b) Nếu  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  ngược hướng thì điểm  $A$  nằm giữa hai điểm  $B$  và  $C$  (h.1.39) :



Hình 1.39

c) Nếu  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương thì chúng có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

Trường hợp  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng hướng :

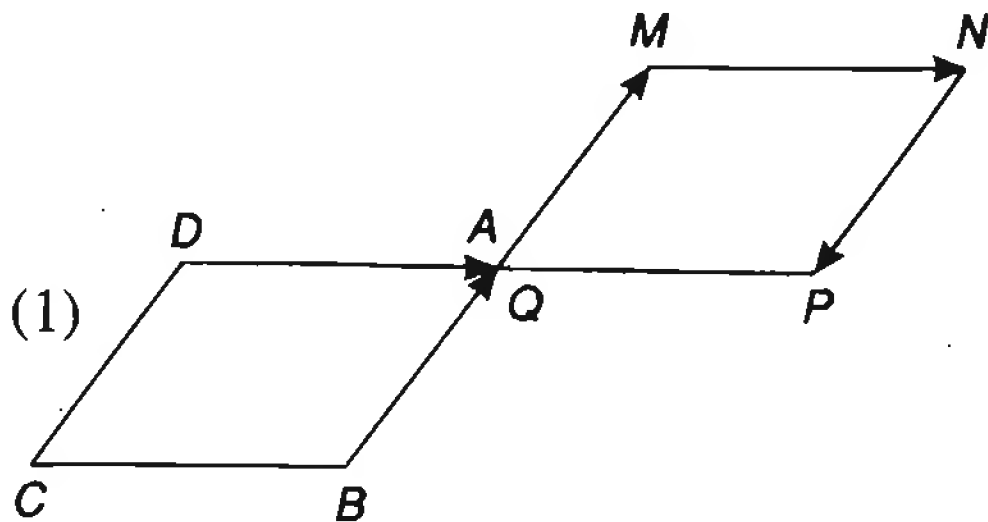
- Nếu  $|\overrightarrow{AB}| > |\overrightarrow{AC}|$  thì  $C$  nằm giữa  $A$  và  $B$ .
- Nếu  $|\overrightarrow{AB}| < |\overrightarrow{AC}|$  thì  $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$ .

Trường hợp  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  ngược hướng thì  $A$  nằm giữa  $B$  và  $C$ .

1.7. Ta có  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}$   
 $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$  (h.1.40).

Suy ra  $AM = NP$  và  $AM \parallel NP$ . Vậy tứ giác  $AMNP$  là hình bình hành. (1)

Ta có  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC}$   
 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$



Hình 1.40

suy ra  $PQ = MN$  và  $PQ \parallel MN$ . Vậy tứ giác  $MNPQ$  là hình bình hành. (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $A \equiv Q$  hay  $\overrightarrow{AQ} = \vec{0}$ .

## §2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTO

1.8.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ .

1.9.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}$ . Như vậy hệ thức cần chứng minh tương đương với đẳng thức đúng.

1.10. a)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} \Rightarrow OB = OA$ , ba điểm  $A, O, B$  thẳng hàng và điểm  $O$  ở giữa  $A$  và  $B$ . Suy ra  $O$  là trung điểm của  $AB$ .

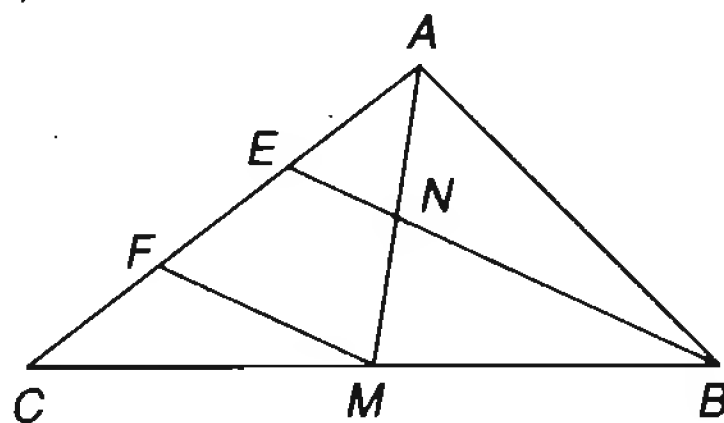
b)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \vec{0} \Rightarrow B \equiv O$ .

1.11. Trong tam giác đều  $ABC$ , tâm  $O$  của đường tròn ngoại tiếp cũng là trọng tâm của tam giác. Vậy  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ .

1.12.  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ .

1.13.  $FM \parallel BE$  vì  $FM$  là đường trung bình của tam giác  $CEB$ .

Ta có  $EA = EF$ . Vậy  $EN$  là đường trung bình của tam giác  $AFM$ . Suy ra  $N$  là trung điểm của  $AM$ . Vậy  $\overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{NM}$  (h.1.41).



Hình 1.41

1.14. a)  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}$ . Vậy mọi điểm  $M$  đều thoả mãn hệ thức a).

b)  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow A \equiv B$ , vô lí. Vậy không có điểm  $M$  nào thoả mãn hệ thức b).

c)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$ . Vậy  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ .

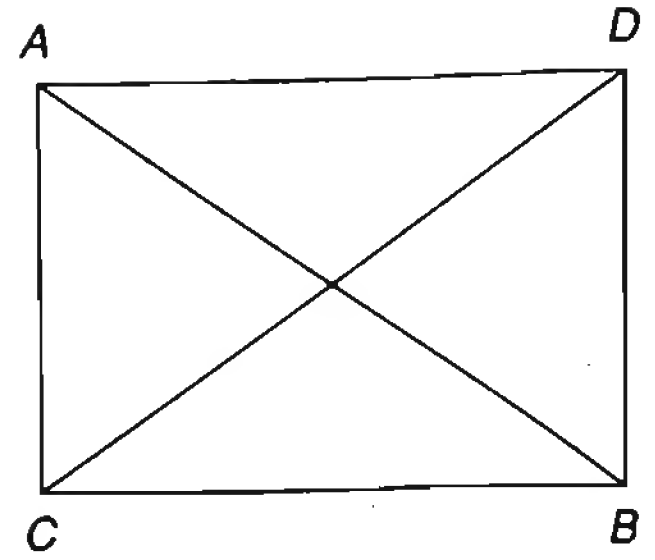
1.15. Vẽ hình bình hành  $CADB$ . Ta có  $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD}$ ,

do đó  $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = CD$ .

Vì  $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}$ , do đó  $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}| = BA$ .

Từ  $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}|$  suy ra  $CD = AB$  (h.1.42).

Vậy tứ giác  $CADB$  là hình chữ nhật. Ta có tam giác  $ACB$  vuông tại  $C$ .



Hình 1.42

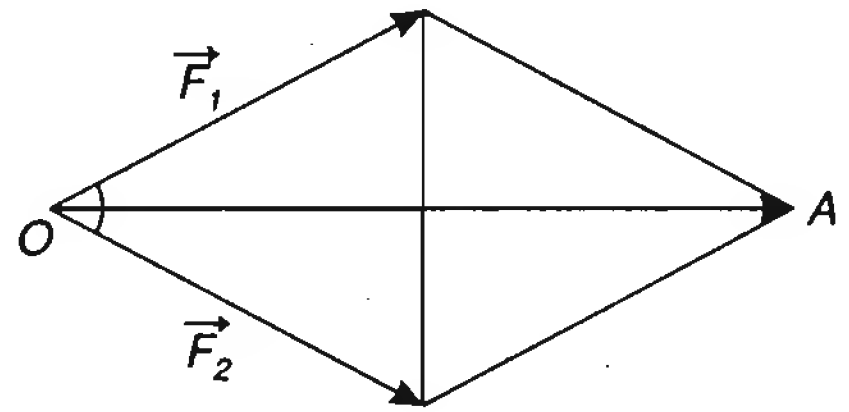
1.16.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DE} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.$

1.17.  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$  trong đó  $OACB$  là hình bình hành.  $OC$  là phân giác góc  $\widehat{AOB}$  khi và chỉ khi  $OACB$  là hình thoi, tức là  $OA = OB$ .

1.18.  $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OA}$

$$|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}| = OA = 100\sqrt{3}.$$

Vậy cường độ của hợp lực là  $100\sqrt{3}$  N (h.1.43).



Hình 1.43

1.19. (Xem h.1.44)

a)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

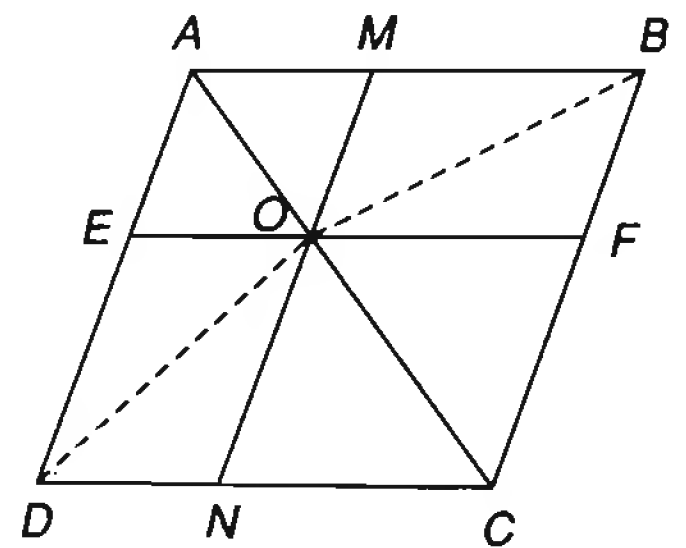
$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}.$$

Vì  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  nên ta có  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}.$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}.$$

b) Tứ giác  $AMOE$  là hình bình hành nên ta có  $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MO}$  (1)

Tứ giác  $OFCN$  là hình bình hành nên ta có  $\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{FC}$  (2)



Hình 1.44

$$\begin{aligned} \text{Từ (1) và (2) suy ra } \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{FN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{FC} \\ &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{FO}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{FC}) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} \end{aligned}$$

(vì  $\overrightarrow{FO} = \overrightarrow{BM}$ ,  $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{BF}$ ).

$$\text{Vậy } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{FN}.$$

### §3. TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ

- 1.20. a)  $m = 1$  ;                      b)  $m = -1$  ;                      c)  $m = 4$  ;  
 d)  $m = -\frac{1}{3}$  ;                      e)  $m = 0$  ;                      g) Không tồn tại ;  
 h) Mọi giá trị của  $m$  đều thoả mãn.

- 1.21. a)  $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$  và  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng hướng. Ta có  $|m\vec{a}| = |m||\vec{a}|$ ,  $|m\vec{b}| = |m||\vec{b}|$ ,  
 do đó  $|m\vec{a}| = |m\vec{b}|$ .

$m\vec{a}$  và  $m\vec{b}$  cùng hướng. Vậy  $m\vec{a} = m\vec{b}$ .

- b)  $m\vec{a} = m\vec{b} \Rightarrow |m\vec{a}| = |m\vec{b}| \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$  vì  $m \neq 0$  ;  
 $m\vec{a}$  và  $m\vec{b}$  cùng hướng  $\Rightarrow \vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.  
 Vậy  $\vec{a} = \vec{b}$ .

- c)  $m\vec{a} = n\vec{a} \Rightarrow |m\vec{a}| = |n\vec{a}| \Rightarrow |m| = |n|$  vì  $\vec{a} \neq \vec{0}$  ;  
 $m\vec{a}$  và  $n\vec{a}$  cùng hướng  $\Rightarrow m$  và  $n$  cùng dấu.  
 Vậy  $m = n$ .

- 1.22.  $\vec{a} + \vec{a} + \dots + \vec{a} = (1 + 1 + \dots + 1)\vec{a} = n\vec{a}$ .

- 1.23.  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$   
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GI} = \vec{0}$  ( $I$  là trung điểm của  $BC$ )  
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$ .

Từ đó suy ra ba điểm  $A, G, I$  thẳng hàng, trong đó  $GA = 2GI$ ,  $G$  nằm giữa  $A$  và  $I$ .

Vậy  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

- 1.24. Gọi  $G$  và  $G'$  lần lượt là trọng tâm của hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$ . Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} \\ \overrightarrow{BB'} &= \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} \\ \overrightarrow{CC'} &= \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'}.\end{aligned}$$

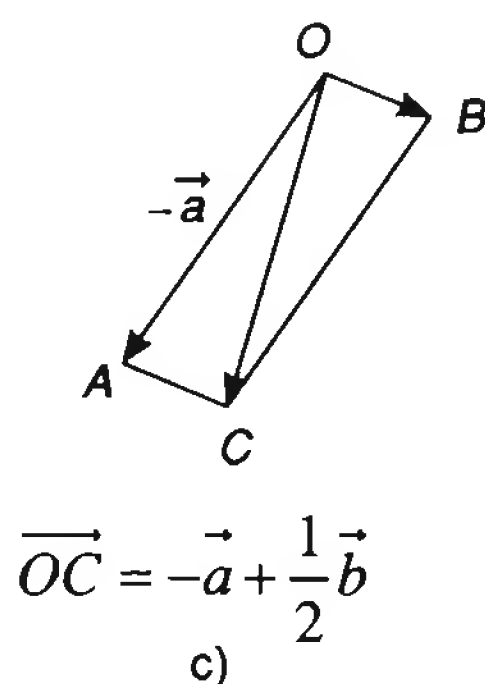
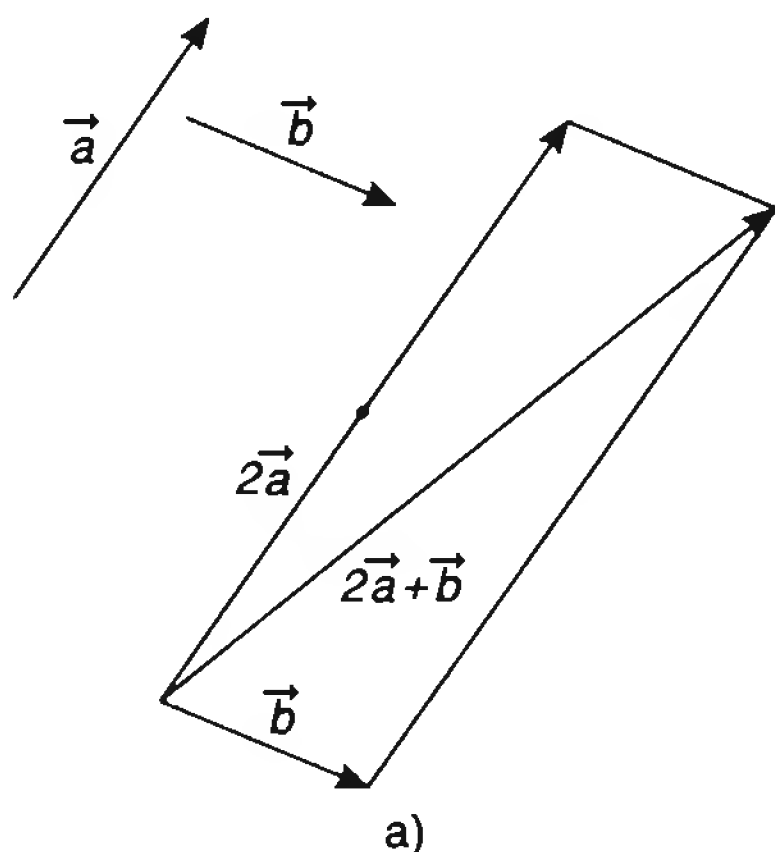
Cộng từng vế của ba đẳng thức trên ta được

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

Do đó, nếu  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$  thì  $\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$  hay  $G \equiv G'$ .

👁 **Chú ý :** Từ chứng minh trên cũng suy ra rằng nếu hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  có cùng trọng tâm thì  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ .

1.25. (Xem h.1.45)



Hình 1.45

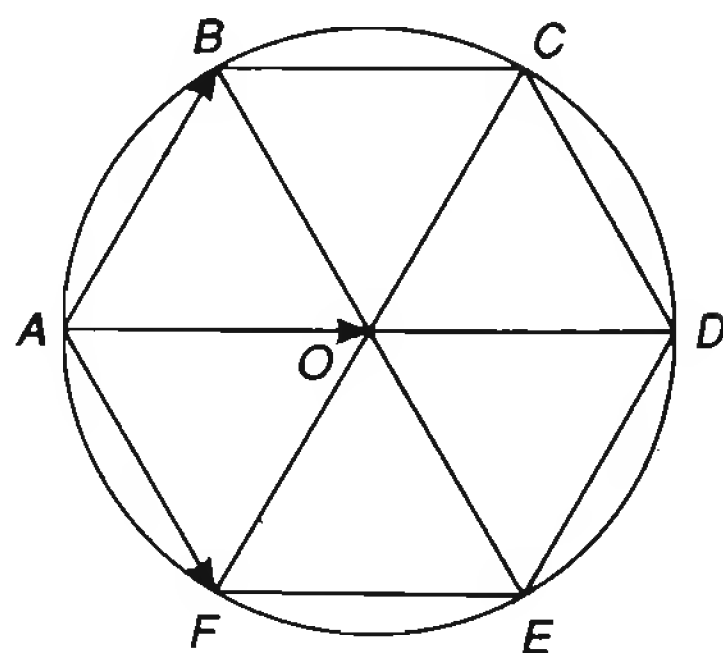
Hãy tự vẽ trường hợp  $\vec{a} - 2\vec{b}$ .

1.26. (Xem h.1.46)

a)  $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}) = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}.$

b)  $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \right| = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Hình 1.46

1.27. Gọi  $E, F$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC$ . (h.1.47)

Ta có tứ giác  $AFME$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$

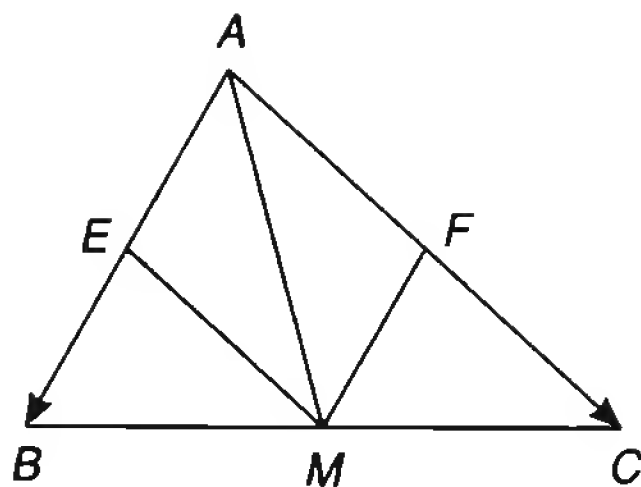
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$



Có thể chứng minh cách khác như sau :

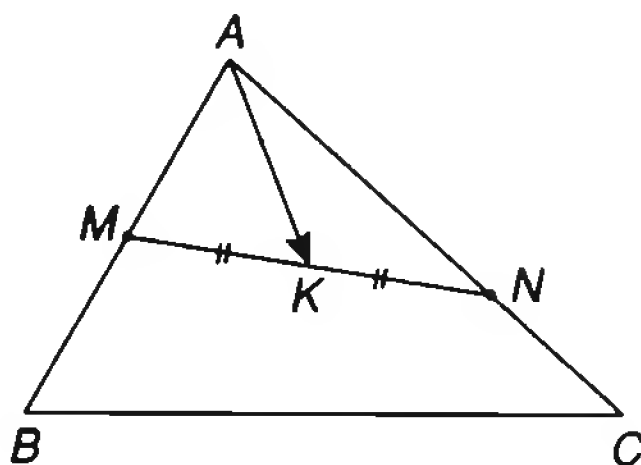
Vì  $M$  là trung điểm của  $BC$  nên  $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned} \text{hay } \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$



Hình 1.47

$$\begin{aligned} \text{1.28. } \overrightarrow{AK} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \text{ (h.1.48)} \end{aligned}$$



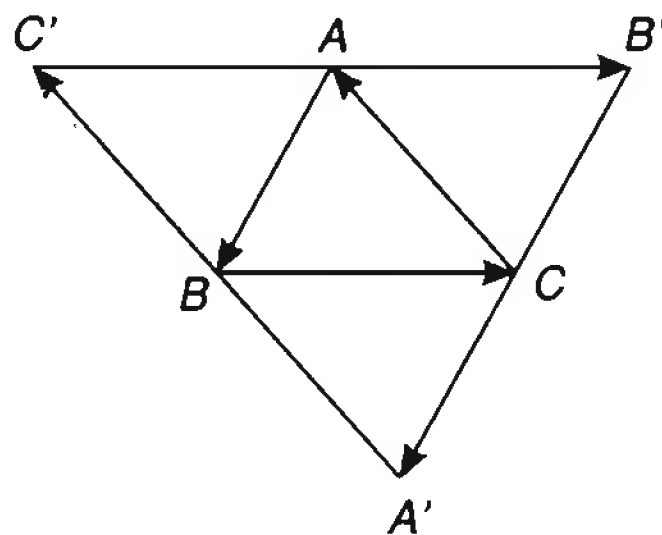
Hình 1.48

1.29. (Xem h.1.49)

a)  $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CA} \Rightarrow$  tứ giác  $ACBC'$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{CB}$ .

$\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0} \Rightarrow A$  là trung điểm của  $B'C'$ .

b) Vì tứ giác  $ACBC'$  là hình bình hành nên  $CC'$  chứa trung tuyến của tam giác  $ABC$  xuất phát từ đỉnh  $C$ . Tương tự như vậy với  $AA'$ ,  $BB'$ . Do đó  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  đồng quy tại trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .



Hình 1.49

1.30. (Xem h.1.50)

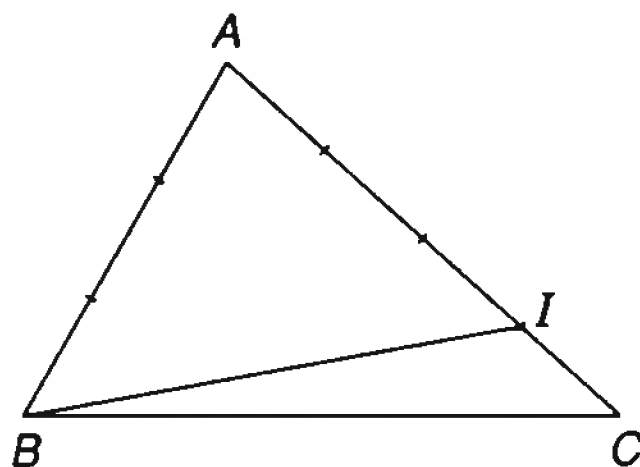
$$\text{a) } \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{b) } \frac{2}{3}\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Vậy  $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$ . Suy ra ba điểm

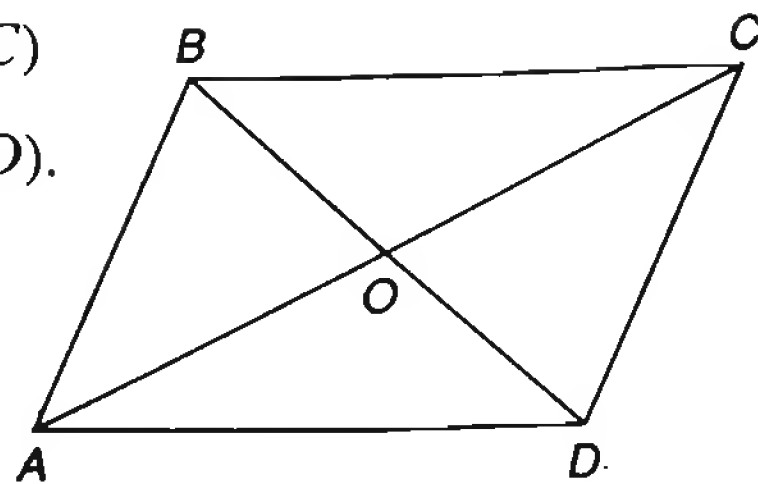
$B, J, I$  thẳng hàng.

Học sinh tự dựng điểm  $J$ .



Hình 1.50

- 1.31.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO}$  (vì  $O$  là trung điểm của  $AC$ )  
 $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$  (vì  $O$  là trung điểm của  $BD$ ).  
 Vậy  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$  (h.1.51).

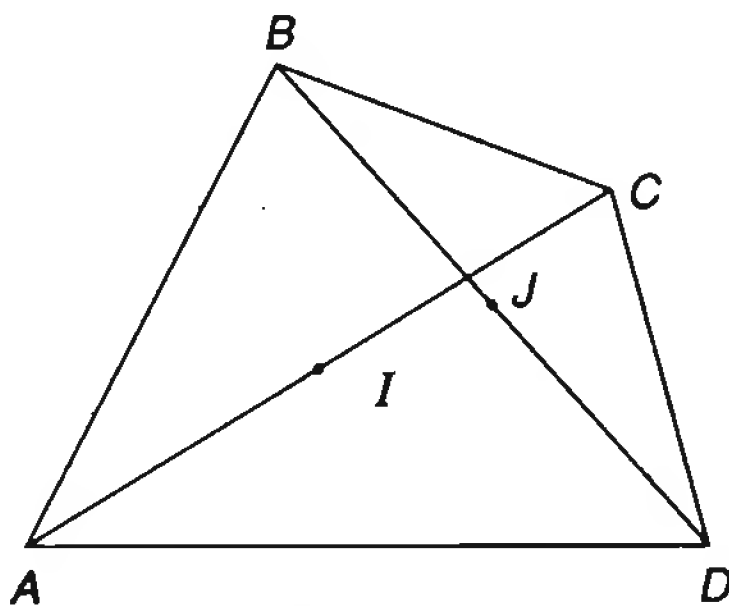


Hình 1.51

- 1.32.  $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$   
 $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DJ}$  (h.1.52).

Cộng từng vế hai đẳng thức trên ta được

$$2\overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{DJ}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$



Hình 1.52

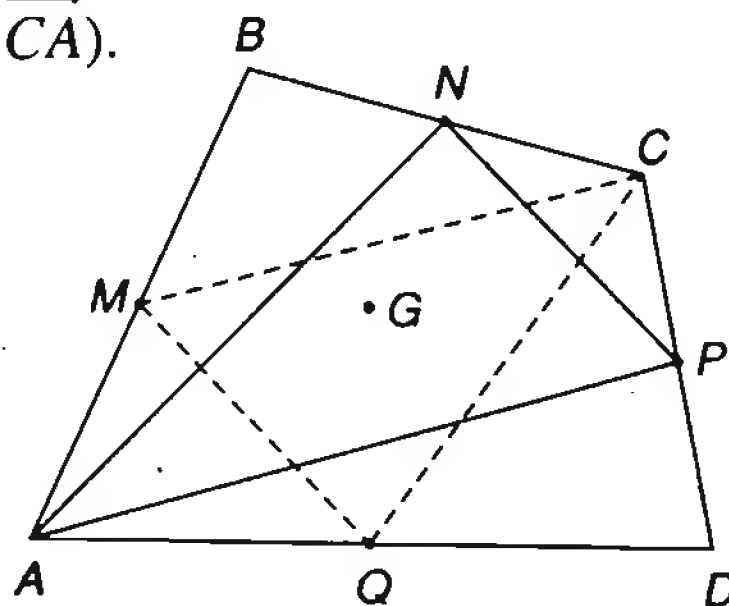
- 1.33. Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ANP$ . Khi đó  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$  (h.1.53).

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GQ} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{PQ} \\ &= (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP}) + \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{PQ}) \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$(\text{vì } \overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \text{ nên } \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{CA}).$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}.$$

Suy ra  $G$  là trọng tâm của tam giác  $CMQ$ .



Hình 1.53

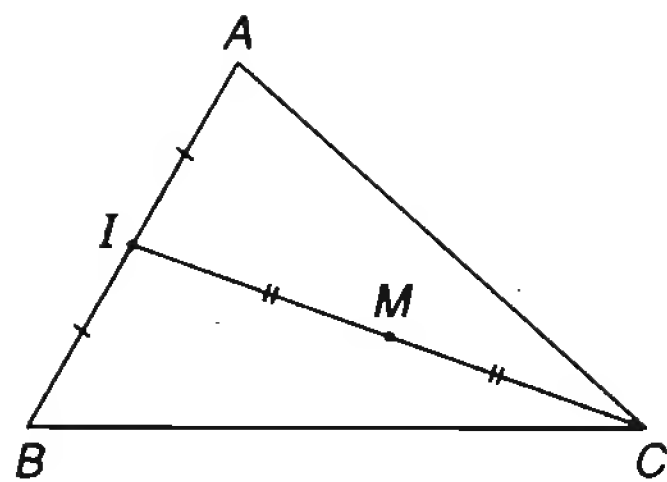
1.34. (Xem h.1.54)

$$a) \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow K$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .



Hình 1.54

$$b) \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \quad (I \text{ là trung điểm của } AB)$$

hay  $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow M$  là trung điểm của  $IC$ .

1.35. (Xem h.1.55)

a) Vì  $AD$  là đường kính của đường tròn tâm  $O$  nên  $BD \perp AB$ ,  $DC \perp AC$ .

Ta có  $CH \perp AB$ ,  $BH \perp AC$  nên suy ra  $CH \parallel BD$  và  $BH \parallel DC$ .

Vậy tứ giác  $HCDB$  là hình bình hành.

$$b) \text{ Vì } O \text{ là trung điểm của } AD \text{ nên } \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO} \quad (1)$$

Vì tứ giác  $HCDB$  là hình bình hành nên ta có  $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$ . Vậy từ (1) suy ra

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO} \quad (2)$$

Theo quy tắc ba điểm, từ (2) suy ra

$$\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{HO}.$$

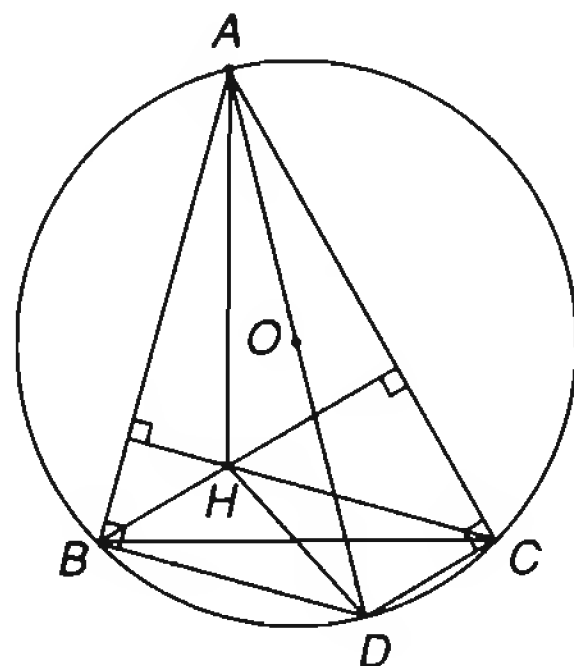
$$\text{Vậy } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}. \quad (3)$$

c)  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}.$$

Từ (3) suy ra  $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ . Vậy ba điểm  $O, H, G$  thẳng hàng.

Trong một tam giác trực tâm  $H$ , trọng tâm  $G$  và tâm đường tròn ngoại tiếp  $O$  thẳng hàng.



Hình 1.55

## §4. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ

1.36.  $\vec{a} = (2 ; 3), \vec{b} = \left(\frac{1}{3}; -5\right), \vec{c} = (3 ; 0), \vec{d} = (0 ; -2).$

1.37.  $\vec{u} = (2 ; -3) \Rightarrow \vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$

$$\vec{u} = (-1 ; 4) \Rightarrow \vec{u} = -\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\vec{u} = (2 ; 0) \Rightarrow \vec{u} = 2\vec{i}$$

$$\vec{u} = (0 ; -1) \Rightarrow \vec{u} = -\vec{j}$$

$$\vec{u} = (0 ; 0) \Rightarrow \vec{u} = 0\vec{i} + 0\vec{j} = \vec{0}.$$

1.38.  $\vec{x} = (1 ; 1), \vec{y} = (1 ; -5), \vec{z} = (3 ; -18).$

1.39. a)  $\vec{a}, \vec{b}$  ngược hướng ;

b)  $\vec{u}, \vec{v}$  cùng hướng ;

c)  $\vec{m}, \vec{n}$  cùng hướng ;

d)  $\vec{c}, \vec{d}$  không cùng phương ;

e)  $\vec{e}, \vec{f}$  không cùng phương.

1.40. a)  $\overrightarrow{AB} = (2 ; -2), \overrightarrow{AC} = (4 ; -4).$

Vậy  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow$  ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.

b)  $\overrightarrow{AB} = (2 ; 1), \overrightarrow{AC} = (m + 3 ; 2m)$

$$\text{Ba điểm } A, B, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \frac{m+3}{2} = \frac{2m}{1} \Leftrightarrow m = 1.$$

1.41.  $\overrightarrow{AB} = (5 ; 10), \overrightarrow{CD} = (-4 ; -8).$  Ta có  $\overrightarrow{CD} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$ , vậy hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  song song hoặc trùng nhau.

Ta có  $\overrightarrow{AC} = (2 ; 6)$  và  $\overrightarrow{AB}$  không cùng phương vì  $\frac{5}{2} \neq \frac{10}{6}.$

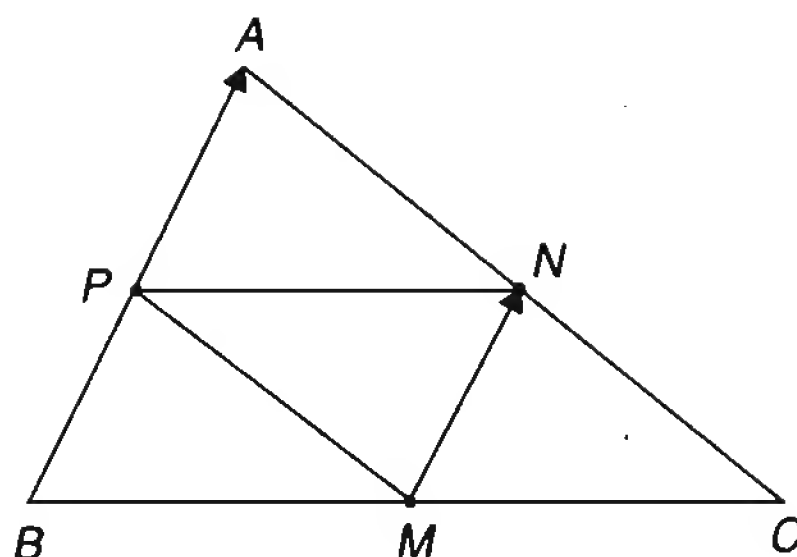
Vậy  $AB \parallel CD.$

1.42.  $\overrightarrow{MN} = (1; 2)$

$\overrightarrow{PA} = (x_A; y_A + 4)$  (h.1.56).

Vì  $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{MN}$  suy ra  $\begin{cases} x_A = 1 \\ y_A + 4 = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_A = 1 \\ y_A = -2. \end{cases}$



Hình 1.56

Tương tự, ta tính được  $\begin{cases} x_B = -1 \\ y_B = -6 \end{cases}$  và  $\begin{cases} x_C = 3 \\ y_C = 8. \end{cases}$

Vậy tọa độ các đỉnh của tam giác là  $A(1; -2)$ ,  $B(-1; -6)$  và  $C(3; 8)$ .

1.43.  $\overrightarrow{BA} = (-2; -8)$

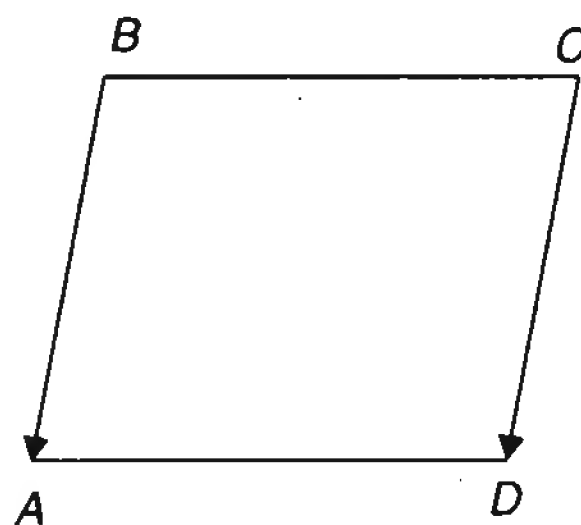
$\overrightarrow{CD} = (x_D; y_D + 1)$ . Vì  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$  nên

$\begin{cases} x_D = -2 \\ y_D + 1 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = -9. \end{cases}$

Vậy tọa độ đỉnh  $D$  là  $(-2; -9)$  (h.1.57).

Nhận xét : Ta có thể tính tọa độ đỉnh  $D$

dựa vào biểu thức  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ .



Hình 1.57

1.44. Gọi  $I$  là trung điểm của  $AC$ .

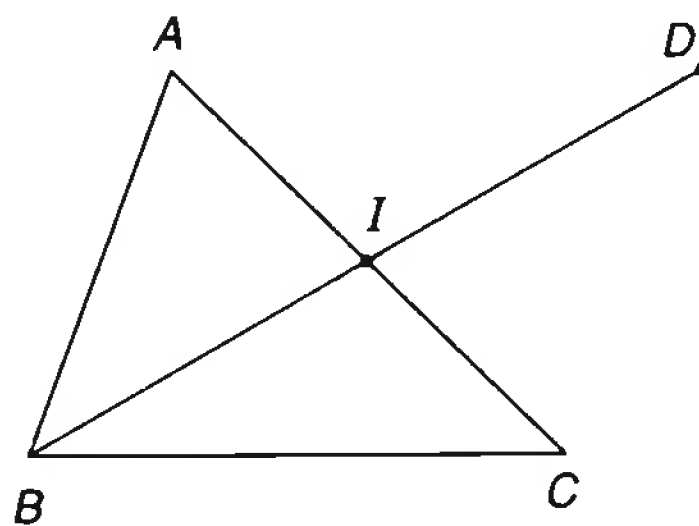
$x_I = \frac{-5+4}{2} = -\frac{1}{2}$ ;  $y_I = \frac{6+3}{2} = \frac{9}{2}$ .

Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành  $\Leftrightarrow I$  là trung điểm của  $BD$ .

Vậy  $\begin{cases} \frac{x_D - 4}{2} = -\frac{1}{2} \\ \frac{y_D - 1}{2} = \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D - 4 = -1 \\ y_D - 1 = 9 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_D = 3 \\ y_D = 10. \end{cases}$

Vậy tọa độ đỉnh  $D$  là  $(3; 10)$  (h.1.58).

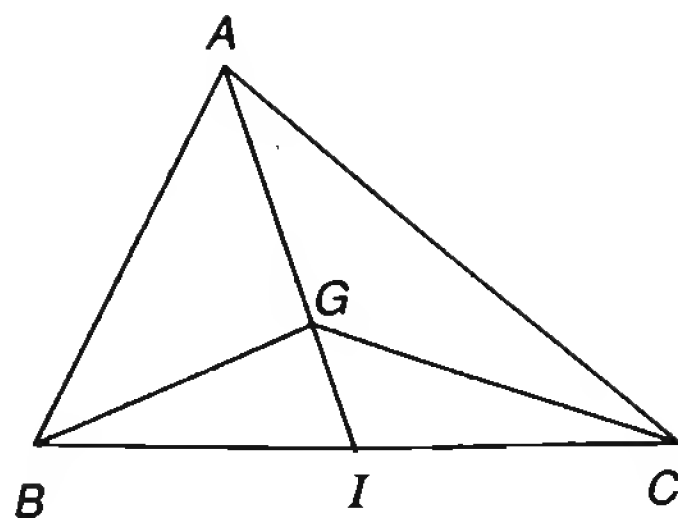


Hình 1.58

1.45.  $x_G = \frac{-3+9-5}{3} = \frac{1}{3}$  ;

$y_G = \frac{6-10+4}{3} = 0$  (h.1.59)

Tứ giác  $BGCD$  là hình bình hành  
thì toạ độ điểm  $D$  là  $D\left(\frac{11}{3}; -6\right)$ .



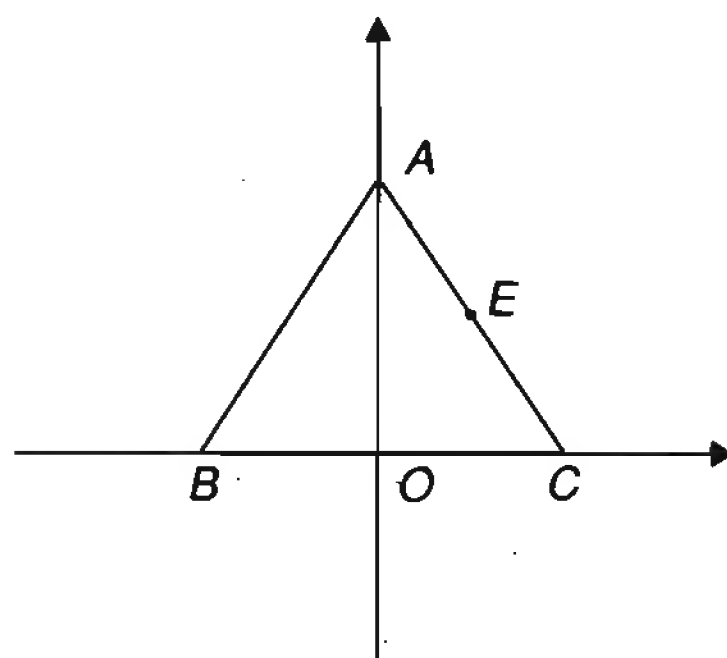
Hình 1.59

1.46. (Xem h.1.60)

a)  $A\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $B\left(-\frac{a}{2}; 0\right)$ ,  $C\left(\frac{a}{2}; 0\right)$

b)  $E\left(\frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$

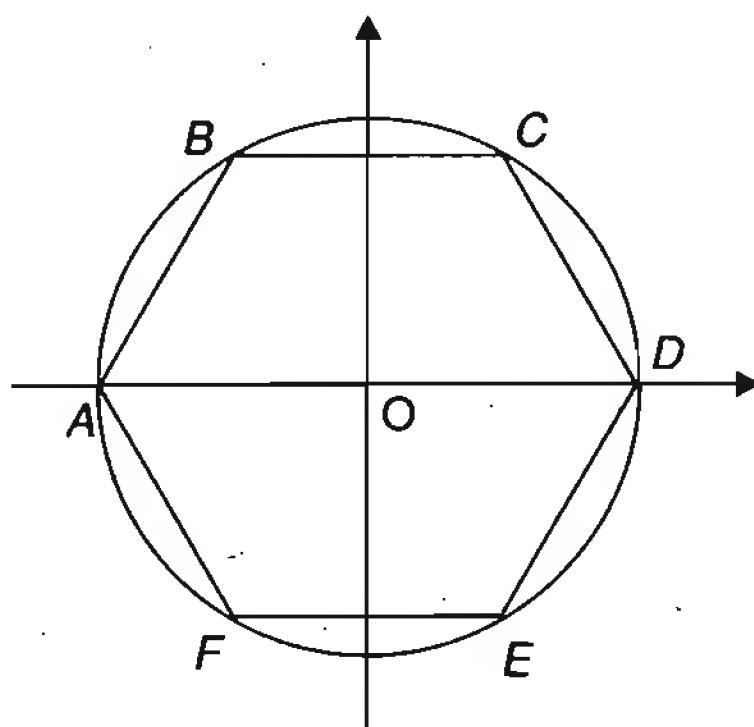
c) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam  
giác đều trùng với trọng tâm của  
tam giác  $G\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$ .



Hình 1.60

1.47.  $A(-6; 0)$ ,  $D(6; 0)$ ,  $B(-3; 3\sqrt{3})$ ,  $C(3; 3\sqrt{3})$ ,  $F(-3; -3\sqrt{3})$ ,  $E(3; -3\sqrt{3})$   
(h.1.61).

Người ta có thể nhận xét về tính đối xứng của các đỉnh qua tâm  $O$  hoặc qua  
các trục  $Ox$ ,  $Oy$  để tìm toạ độ các đỉnh của lục giác đều.



Hình 1.61

## CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

**1.48.** (Xem h.1.62)

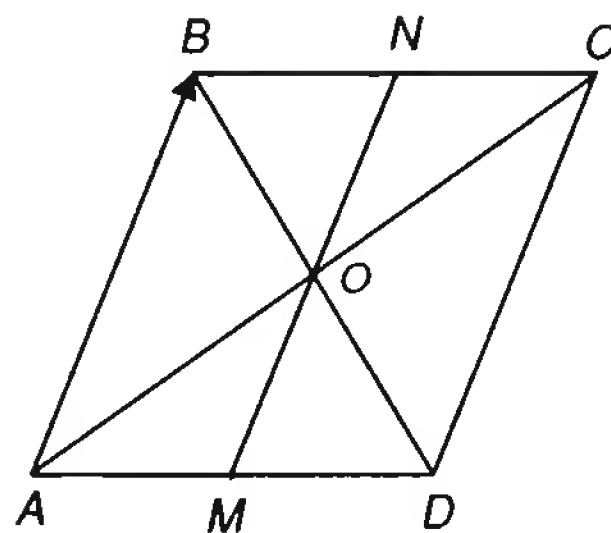
a) Hai vectơ cùng phương với  $\overrightarrow{AB}$  là  $\overrightarrow{MO}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  ;

Hai vectơ cùng hướng với  $\overrightarrow{AB}$  là  $\overrightarrow{ON}$ ,  $\overrightarrow{DC}$  ;

Hai vectơ ngược hướng với  $\overrightarrow{AB}$  là  $\overrightarrow{OM}$ ,  $\overrightarrow{NO}$ .

b) Vectơ bằng  $\overrightarrow{MO}$  là  $\overrightarrow{ON}$  ;

Vectơ bằng  $\overrightarrow{OB}$  là  $\overrightarrow{DO}$ .



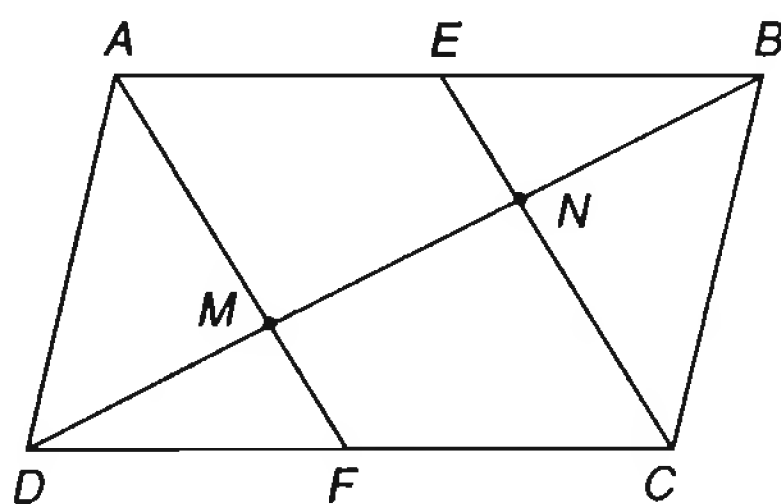
Hình 1.62

**1.49.**  $AECF$  là hình bình hành  $\Rightarrow EN \parallel AM$

$E$  là trung điểm của  $AB \Rightarrow N$  là trung điểm của  $BM$ , do đó  $MN = NB$ .

Tương tự,  $M$  là trung điểm của  $DN$ , do đó  $DM = MN$ .

Vậy  $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$  (h.1.63).



Hình 1.63

**1.50.**  $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$

$\Rightarrow$  tứ giác  $FEHG$  là hình bình hành

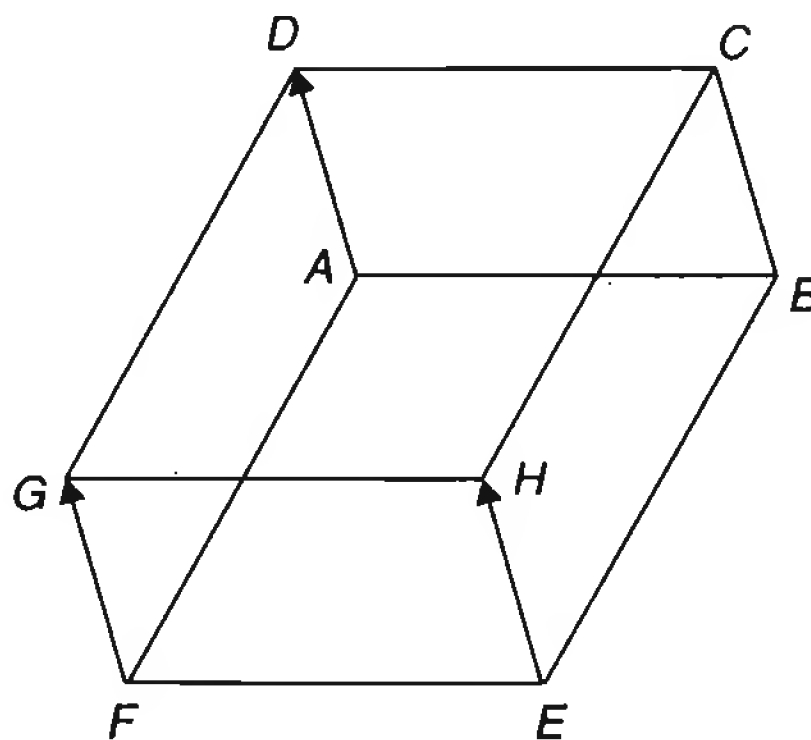
$\Rightarrow \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FE}$  (h.1.64). (1)

Ta có  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$

$\Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$ . (2)

Từ (1) và (2) ta có  $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{DC}$ .

Vậy tứ giác  $GHCD$  là hình bình hành.



Hình 1.64

- 1.51. a)  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ .  
b)  $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}$ .

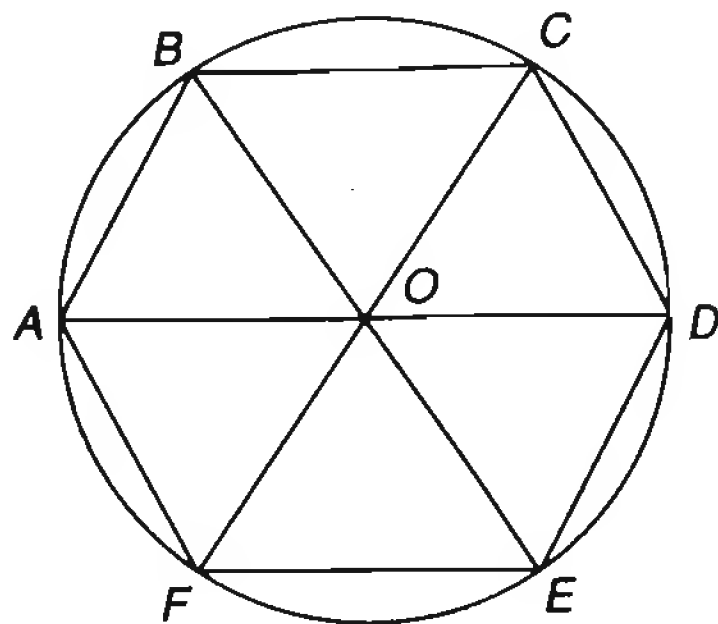
- 1.52. Gọi  $O$  là tâm lục giác đều. Khi đó  $O$  là trọng tâm của các tam giác đều  $ACE$  và  $BDF$  (h.1.65).

Do đó, với mọi điểm  $M$  ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} = 3\overrightarrow{MO}$$

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} = 3\overrightarrow{MO}$$

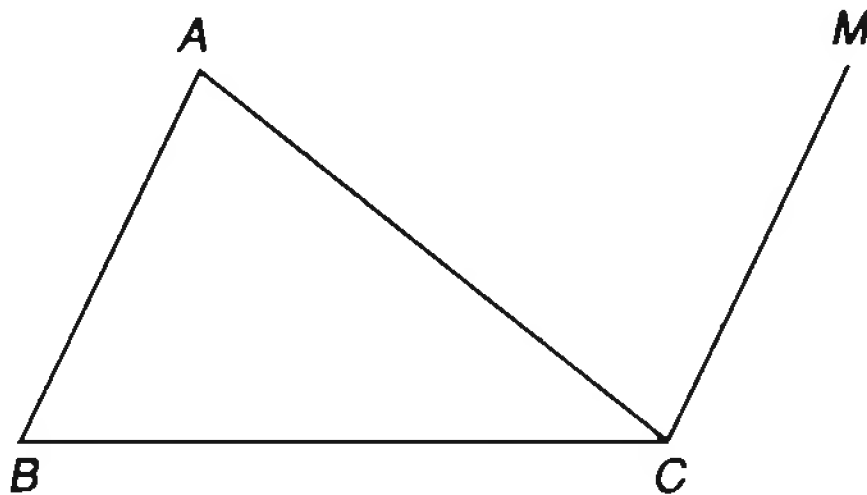
Vậy ta có đẳng thức cần chứng minh.



Hình 1.65

- 1.53.  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CM}$  (h.1.66).

$M$  là đỉnh của hình bình hành  $ABCM$ .

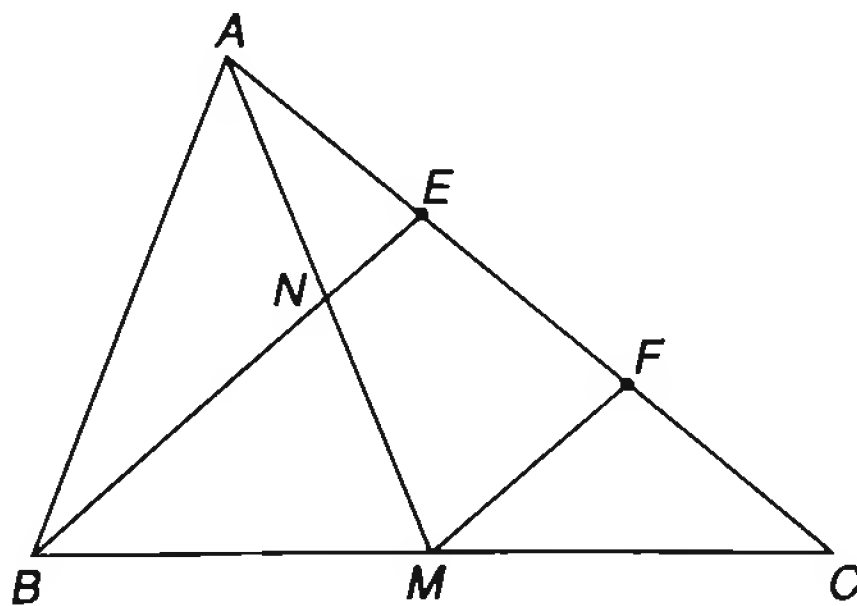


Hình 1.66

- 1.54. Ta có  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$  (h.1.67).

Vì  $MF \parallel BE$  nên  $N$  là trung điểm của  $AM$ , suy ra  $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MN} = \vec{0}$ .

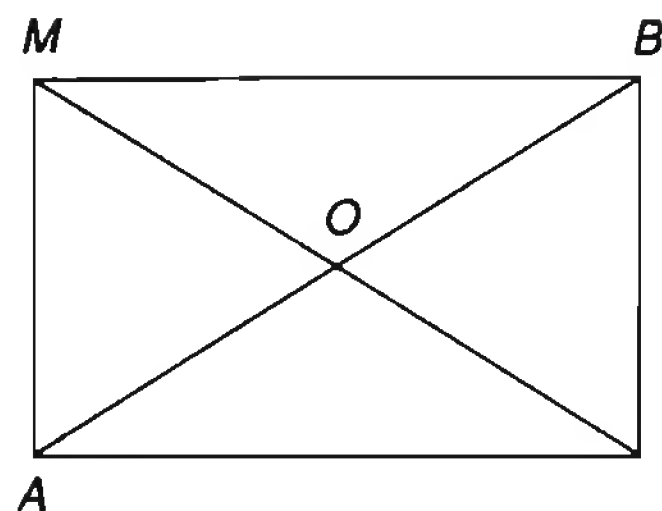
Do đó  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AC}$ .



Hình 1.67



1.55.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MO} \Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = 2MO$   
 $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = AB$  (h.1.68).  
 Vậy  $2MO = AB$  hay  $OM = \frac{1}{2}AB$ .



Hình 1.68

**Chú ý.** Tập hợp các điểm  $M$  có tính chất  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$  là đường tròn đường kính  $AB$ .

1.56.  $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$   
 $= 2\overrightarrow{ME} - 2\overrightarrow{MC}$  ( $E$  là trung điểm cạnh  $AB$ )  
 $= 2(\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MC}) = 2\overrightarrow{CE}$ .

Vậy  $\vec{v}$  không phụ thuộc vị trí của điểm  $M$ .

$\overrightarrow{CD} = \vec{v} = 2\overrightarrow{CE}$  thì  $E$  là trung điểm của  $CD$ . Vậy ta dựng được điểm  $D$ .

1.57. (Xem h.1.69)

a)  $3\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = 3(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC}) - (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB})$   
 $= (3\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM}) + (3\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{OM}$ .

b) Gọi  $S$ ,  $Q$  và  $R$  lần lượt là trung điểm của  $BC$ ,  $CA$  và  $AB$ .

$$\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SC}$$

$$\overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{NA} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CQ}$$

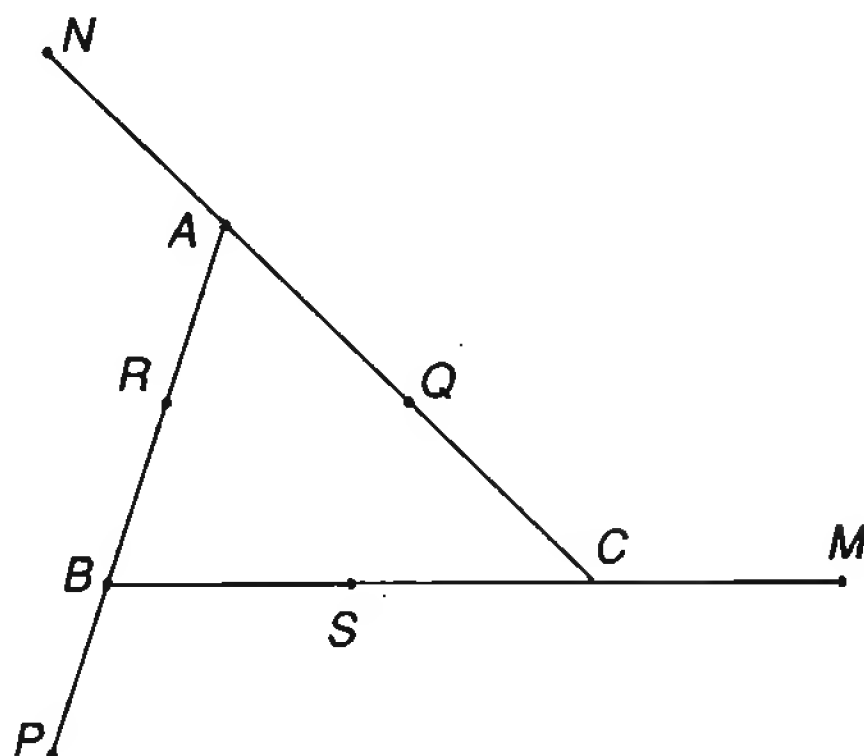
$$\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{PB} \Rightarrow \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{RB} = \overrightarrow{QS}.$$

Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  thì  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} &= \\ &= \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BP} \\ &= (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{QS}) \\ &= \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Vậy  $G$  là trọng tâm của tam giác  $MNP$ .

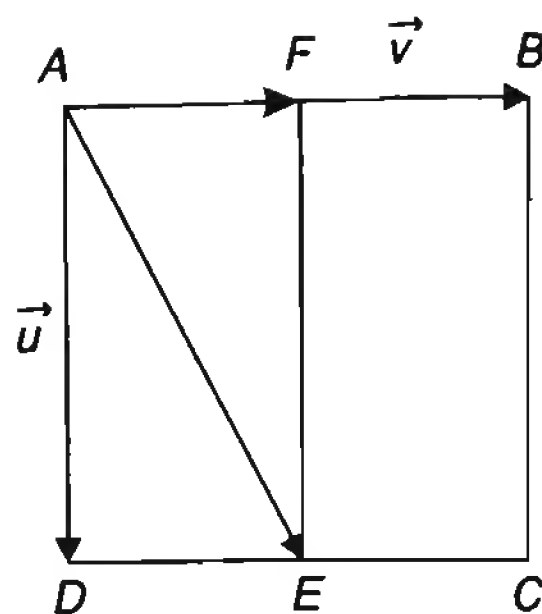


Hình 1.69

1.58. Gọi  $F$  là trung điểm của cạnh  $AB$ . Ta có

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

Vậy  $\overrightarrow{AE} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$  (h.1.70).



Hình 1.70

1.59.  $\overline{AB} = -8$ ,  $\overline{BA} = 8$ ,  $\overline{AC} = -9$ ,  $\overline{BC} = -1$ .

1.60. (Xem h.1.71)

a)  $A(-4; 0)$ ,  $C(4; 0)$ ,  $B(0; 3)$ ,  $D(0; -3)$ .

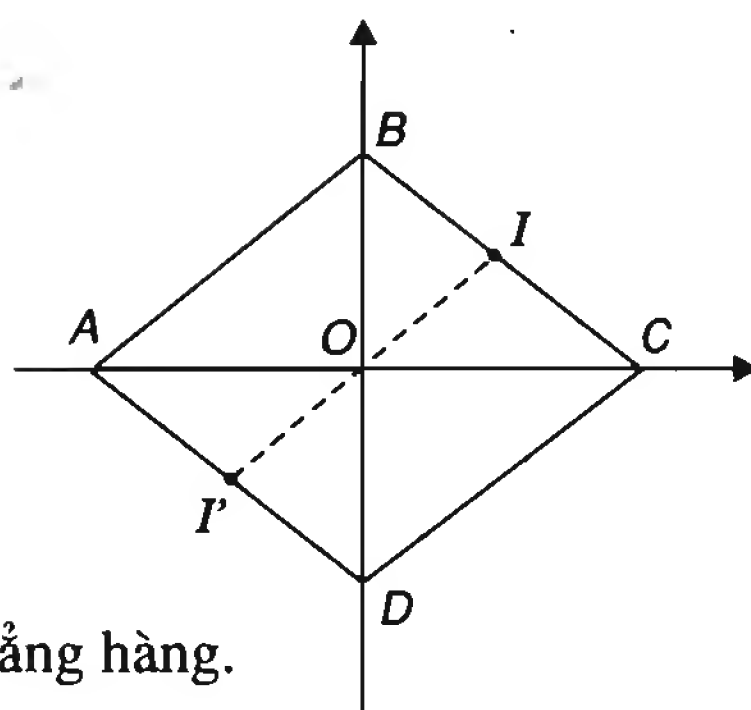
b)  $I(2; \frac{3}{2})$ ,  $G(0; 1)$ .

c)  $I'(-2; -\frac{3}{2})$

$$\overrightarrow{AI'} = (2; -\frac{3}{2}), \quad \overrightarrow{AD} = (4; -3).$$

Vậy  $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AI'}$ . Suy ra ba điểm  $A$ ,  $I'$ ,  $D$  thẳng hàng.

d)  $\overrightarrow{AC} = (8; 0)$ ,  $\overrightarrow{BD} = (0; -6)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (4; -3)$ .



Hình 1.71

## CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1.61. Chọn (D).

1.62. Chọn (C).

1.63. Với mỗi cặp hai điểm ta có 2 vectơ. Vậy số các vectơ không thể là số lẻ. Với 6 điểm thì có nhiều hơn 6 cặp điểm khác nhau, nên số vectơ phải lớn hơn 12.

Chọn (D).

1.64. Chọn (A).

1.65. Chọn (B).

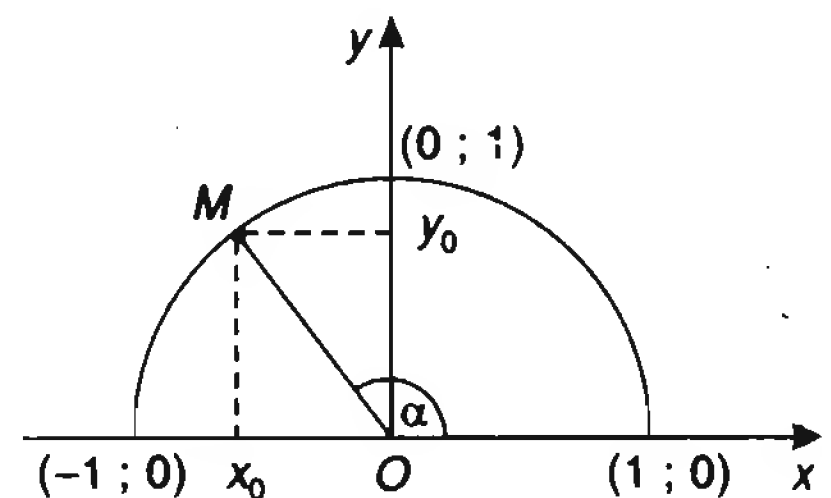
- 1.66. Tổng một số lẻ vectơ có độ dài bằng 5 và cùng giá không thể là vectơ không. Chọn (B).
- 1.67. Chọn (C).
- 1.68. Chọn (D).
- 1.69. Chọn (B).
- 1.70. Chọn (B).
- 1.71. Chọn (C).
- 1.72.  $\overrightarrow{GA}$  và  $\overrightarrow{GI}$  ngược hướng. Các cặp vectơ  $\overrightarrow{IG}$ ,  $\overrightarrow{AI}$  và  $\overrightarrow{GA}$ ,  $\overrightarrow{AI}$  cũng ngược hướng. Chọn (B).
- 1.73. Khi phân tích  $\overrightarrow{AE} = h\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$  thì hai số  $h, k$  không thể lớn hơn 1, không có số âm và không thể bằng nhau. Chọn (B).
- 1.74. Chọn (B).
- 1.75. Tính tọa độ của  $\vec{a} + \vec{b}$  và  $\vec{a} - \vec{b}$ . Ta thấy  $\vec{c} = -2(\vec{a} + \vec{b})$ . Chọn (D).
- 1.76.  $\overrightarrow{AB} = (1; 2)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-3; -6)$ . Chọn (B).
- 1.77. Tổng ba hoành độ và ba tung độ của ba đỉnh đều khác không và tọa độ không thể là  $\sqrt{2}$ . Chọn (D).
- 1.78. Chọn (C).
- 1.79. Chọn (B).
- 1.80. Kiểm tra đẳng thức  $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{MN}$  bằng tọa độ. Chọn (A).
- 1.81. Kiểm tra đẳng thức  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$  bằng tọa độ. Chọn (B).
- 1.82. Khẳng định đúng là (D) vì  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$  và tọa độ của  $M$  là tọa độ của vectơ  $\overrightarrow{OM}$ . Chọn (D).
- 1.83. Chọn (B).
- 1.84. Nhận xét rằng tọa độ của  $2\vec{i} + \vec{j}$  không thể là số âm và số vô tỉ. Chọn (C).
- 1.85. Tổng các hoành độ và tung độ của ba đỉnh phải bằng 0. Chọn (C).

## TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO VÀ ỨNG DỤNG

### §1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ TỪ $0^\circ$ ĐẾN $180^\circ$

#### A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

**1. Định nghĩa :** Với mỗi góc  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ) ta xác định được một điểm  $M$  trên nửa đường tròn đơn vị (h. 2.1) sao cho  $\widehat{xOM} = \alpha$ . Giả sử điểm  $M$  có tọa độ là  $M(x_0; y_0)$ . Khi đó :



Hình 2.1

- Tung độ  $y_0$  của điểm  $M$  gọi là *sin của góc  $\alpha$*  và được kí hiệu là  $\sin \alpha = y_0$ .
- Hoành độ  $x_0$  của điểm  $M$  gọi là *côsin của góc  $\alpha$*  và được kí hiệu là  $\cos \alpha = x_0$ .

- Tỉ số  $\frac{y_0}{x_0}$  với  $x_0 \neq 0$  gọi là *tang của góc  $\alpha$*  và được kí hiệu là

$$\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}.$$

- Tỉ số  $\frac{x_0}{y_0}$  với  $y_0 \neq 0$  gọi là *côtang của góc  $\alpha$*  và được kí hiệu là

$$\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}.$$

2. Các hệ thức lượng giác

a) Giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

$\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha)$   
 $\cos \alpha = -\cos (180^\circ - \alpha)$   
 $\tan \alpha = -\tan (180^\circ - \alpha)$   
 $\cot \alpha = -\cot (180^\circ - \alpha).$

b) Các hệ thức lượng giác cơ bản

Từ định nghĩa giá trị lượng giác của góc  $\alpha$  ta suy ra các hệ thức :

■  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  ;

■  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha (\alpha \neq 90^\circ)$  ;       $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha (\alpha \neq 0^\circ ; 180^\circ)$  ;

■  $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$  ;       $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$  ;

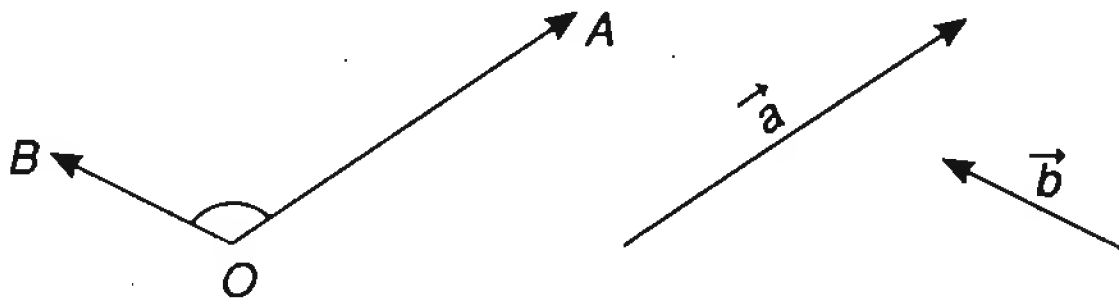
■  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  ;       $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$

3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

<div>Giá trị lượng giác</div> <div><math>\alpha</math></div>	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	

#### 4. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác vectơ  $\vec{0}$ . Từ một điểm  $O$  bất kì ta vẽ  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$  và  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ . Khi đó góc  $\widehat{AOB}$  với số đo từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$  được gọi là góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  (h.2.2) và kí hiệu là  $(\vec{a}, \vec{b})$ .



Hình 2.2

### B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN



#### VẤN ĐỀ 1

Tính giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt

##### 1. Phương pháp

- Dựa vào định nghĩa, tìm tung độ  $y_0$  và hoành độ  $x_0$  của điểm  $M$  trên nửa đường tròn đơn vị với góc  $\widehat{xOM} = \alpha$  và từ đó ta có các giá trị lượng giác :

$$\sin \alpha = y_0 ; \cos \alpha = x_0 ; \tan \alpha = \frac{y_0}{x_0} ; \cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}.$$

- Dựa vào tính chất : Hai góc bù nhau có sin bằng nhau và có cosin, tang, cotang đối nhau.

##### 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Cho góc  $\alpha = 135^\circ$ . Hãy tính  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$  và  $\cot \alpha$ .

GIẢI

Ta có  $\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 135^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} ;$

$$\cos 135^\circ = -\cos(180^\circ - 135^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} ;$$

$$\tan 135^\circ = \frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ} = -1.$$

Do đó  $\cot 135^\circ = -1$ .



**Ví dụ 2.** Cho tam giác cân  $ABC$  có  $\widehat{B} = \widehat{C} = 15^\circ$ . Hãy tính các giá trị lượng giác của góc  $A$ .

*GIẢI*

Ta có  $\widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ .

Vậy  $\sin A = \sin(180^\circ - 150^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$  ;

$$\cos A = -\cos(180^\circ - 150^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} ;$$

$$\tan A = \frac{\sin 150^\circ}{\cos 150^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Do đó  $\cot A = -\sqrt{3}$ .



## **VẤN ĐỀ 2**

Chứng minh các hệ thức về giá trị lượng giác

### **1. Phương pháp**

- Dựa vào định nghĩa giá trị lượng giác của một góc  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ).
- Dựa vào tính chất của tổng ba góc của một tam giác bằng  $180^\circ$ .
- Sử dụng các hệ thức  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  ;  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  ;  $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$ .

### **2. Các ví dụ**



**Ví dụ 1.** Cho góc  $\alpha$  bất kì. Chứng minh rằng  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 2\sin^2 \alpha - 1$ .

**GIẢI**

*Cách 1.* Ta có  $\cos^4 \alpha = (\cos^2 \alpha)^2 = (1 - \sin^2 \alpha)^2 = 1 - 2\sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha$ .

Do đó  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 2\sin^2 \alpha - 1$ .

*Cách 2.* Ta biết rằng  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$   
 $= 1 \cdot [\sin^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)]$   
 $= 2\sin^2 \alpha - 1$ .

*Cách 3.* Ta có thể sử dụng phép biến đổi tương đương như sau :

$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 2\sin^2 \alpha - 1 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 \alpha - 2\sin^2 \alpha + 1 - \cos^4 \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin^2 \alpha)^2 - \cos^4 \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 0.$$

Vì hệ thức cuối cùng luôn luôn đúng nên hệ thức (\*) đúng.



**Ví dụ 2.** Chứng minh rằng :

a)  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  (với  $\alpha \neq 90^\circ$ ) ;

b)  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$  (với  $\alpha \neq 0^\circ ; 180^\circ$ ).

**GIẢI**

a)  $1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$

b)  $1 + \cot^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$



**Ví dụ 3.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng :

a)  $\sin A = \sin(B + C)$  ;

b)  $\cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B + C}{2}$  ;

c)  $\tan A = -\tan (B + C).$



### GIẢI

Vì  $180^\circ - \widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C}$  nên ta có :

a)  $\sin A = \sin (180^\circ - A) = \sin (B + C) ;$

b)  $\cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2}$  vì  $\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 90^\circ$  (hai góc phụ nhau) ;

c)  $\tan A = -\tan (180^\circ - A) = -\tan (B + C).$



### VẤN ĐỀ 3

Cho biết một giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ , tìm các giá trị lượng giác còn lại của  $\alpha$

#### 1. Phương pháp

Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của góc  $\alpha$  và các hệ thức cơ bản liên hệ giữa các giá trị đó như :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 ; \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} ; \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} ;$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} ; 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

#### 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ , hãy tính  $\sin \alpha$  và  $\tan \alpha$ .

### GIẢI

Vì  $\cos \alpha < 0$  nên  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Suy ra  $\sin \alpha > 0$  và  $\tan \alpha < 0$ .

Vì  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  nên thay giá trị  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$  vào ta có :

$$\sin^2 \alpha + \frac{4}{9} = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{5}{9}.$$

Vậy  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$



**Ví dụ 2.** Cho góc  $\alpha$ , biết  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  và  $\tan \alpha = 2$ .

Tính  $\sin \alpha$  và  $\cos \alpha$ .

*GIẢI*

Theo giả thiết ta có :  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2$ . Do đó  $\sin \alpha = 2\cos \alpha$ . (1)

Mặt khác ta lại có :  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ . (2)

Thay (1) vào (2) ta có :  $4\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\Leftrightarrow 5\cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}.$$

Vì  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  nên  $\cos \alpha > 0$ , do đó  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , mà  $\sin \alpha = 2\cos \alpha$  nên ta

có  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ .



**Ví dụ 3.** Cho góc  $\alpha$ , biết  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ . Hãy tính  $\sin \alpha$ ,  $\tan \alpha$ ,  $\cot \alpha$ .

*GIẢI*

Ta có  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$  (vì  $\sin \alpha > 0$ )

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{4}{3}. \text{ Do đó } \cot \alpha = \frac{3}{4}.$$



**Ví dụ 4.** Cho góc  $\alpha$  biết  $\tan \alpha = -2$ . Tính  $\cos \alpha$  và  $\sin \alpha$ .

*GIẢI*

Vì  $\tan \alpha = -2 < 0$  nên  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ , suy ra  $\cos \alpha < 0$ .

$$\text{Vì } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \text{ nên } \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + 4} = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Mặt khác } \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \tan \alpha = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot (-2) = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

*Nhận xét.* Có thể dùng hệ thức  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  để tính  $\sin \alpha$  như sau :

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Do đó } \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ (vì } \sin \alpha > 0).$$



## VẤN ĐỀ 4

Cho biết một giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ , hãy xác định góc  $\alpha$  đó

### 1. Phương pháp

Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của góc  $\alpha$  để dựng góc  $\alpha$  và trong một số trường hợp có thể sử dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn để dựng góc  $\alpha$ .

Tập sử dụng máy tính bỏ túi để xác định góc  $\alpha$ .

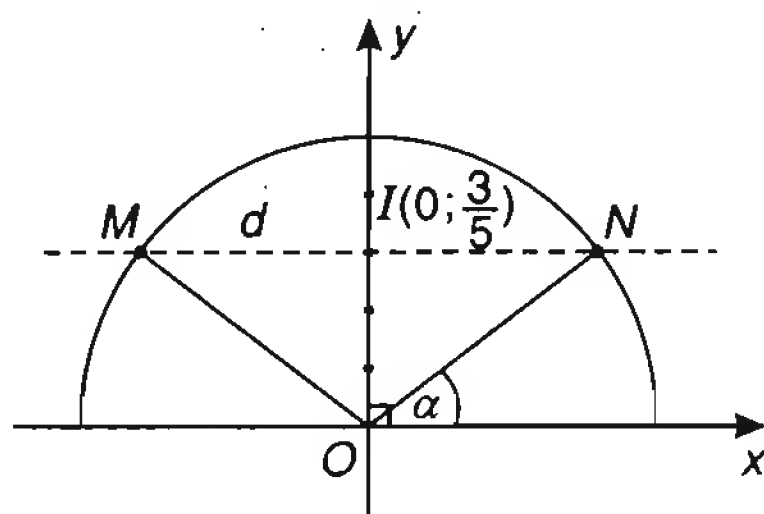
### 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Xác định góc nhọn  $\alpha$  biết  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ .

*GIẢI*

*Cách 1.* Trên trục  $Oy$  của nửa đường tròn đơn vị ta lấy điểm  $I = \left(0; \frac{3}{5}\right)$  và qua đó vẽ đường thẳng  $d$  song song với trục  $Ox$  (h.2.3).

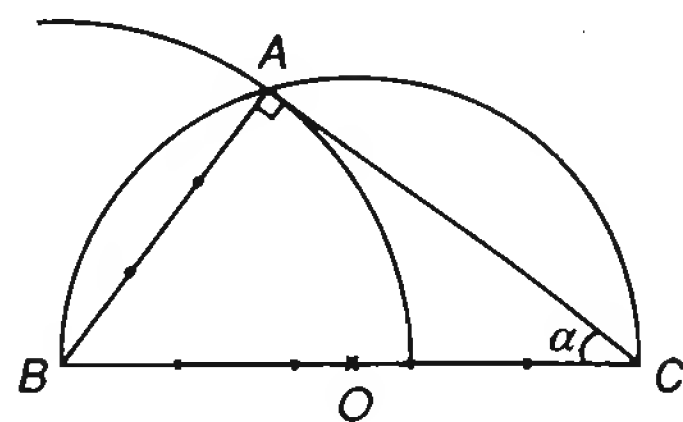


Hình 2.3

Đường thẳng này cắt nửa đường tròn đơn vị tại hai điểm  $M$  và  $N$  trong đó  $\widehat{xOM}$  là góc tù và  $\widehat{xON}$  là góc nhọn. Ta xác định được góc  $\alpha = \widehat{xON}$  có  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ .

**Cách 2.** Ta dựng tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có  $AB = 3$ ,  $BC = 5$  (h.2.4).

Ta có  $\alpha = \widehat{ACB}$  vì  $\sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$ .



Hình 2.4

**Cách 3.** Dùng máy tính bỏ túi (Casio fx-500MS).

- Chọn đơn vị đo : Sau khi mở máy ấn phím nhiều lần để màn hình hiện lên dòng chữ ứng với các số sau đây :

Deg	Rad	Gra
1	2	3

Sau đó ấn phím để xác định đơn vị đo góc là độ.

- Ta tính  $\sin \alpha = \frac{3}{5} = 0,6$  :

Ấn liên tiếp các phím sau đây :

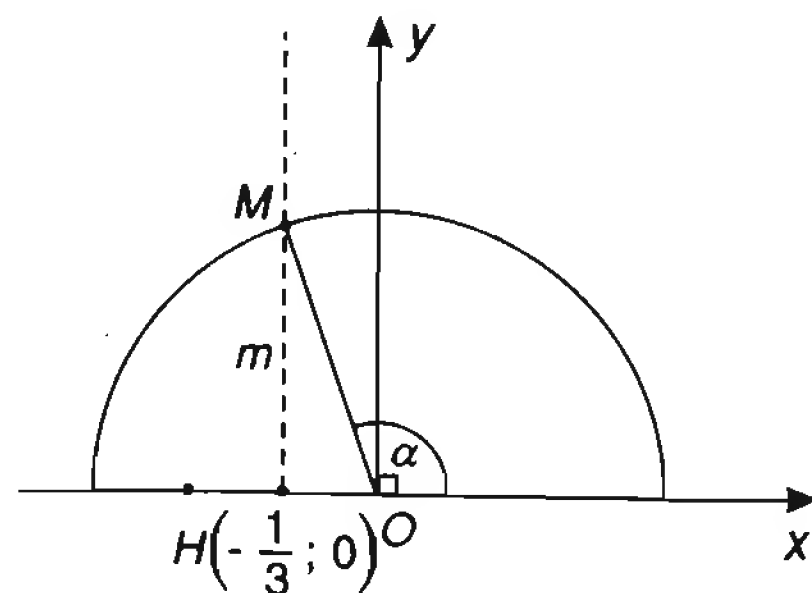
Ta được kết quả là :  $\alpha \approx 36^\circ 52' 11''$ .



**Ví dụ 2.** Xác định góc  $\alpha$  biết rằng  $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ .

*GIẢI*

**Cách 1.** Trên trục  $Ox$  của nửa đường tròn đơn vị ta lấy điểm  $H = \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$  và qua đó vẽ đường thẳng  $m$  song song với trục  $Oy$  (h.2.5). Đường thẳng này cắt nửa đường tròn đơn vị tại  $M$ . Ta có góc  $\alpha = \widehat{xOM}$ .



Hình 2.5

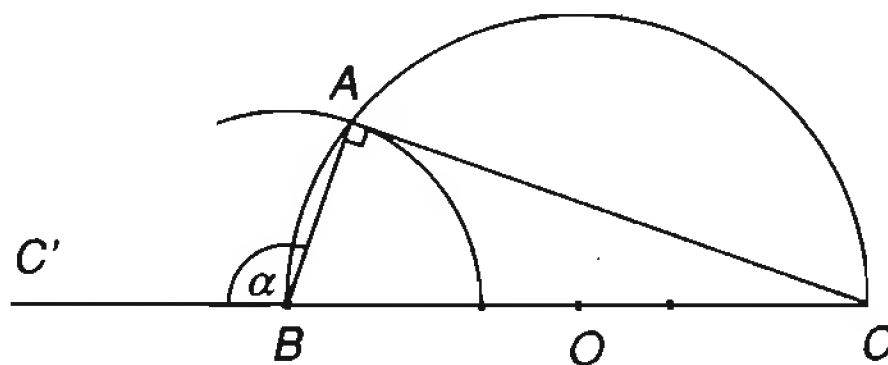
Cách 2. Ta biết rằng  $\cos \alpha = -\cos (180^\circ - \alpha)$ .

Theo giả thiết  $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ , vậy  $\cos (180^\circ - \alpha) = \frac{1}{3}$ .

Ta dựng tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 1$ ,  $BC = 3$  (h.2.6).

Ta có  $\cos \widehat{ABC} = \frac{1}{3}$  nên  $\cos (180^\circ - \widehat{ABC}) = -\frac{1}{3}$ .

Vậy  $\alpha = 180^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{ABC'}$  (tia  $BC'$  ngược hướng với tia  $BC$ ).



Hình 2.6

Cách 3. Dùng máy tính bỏ túi (Casio fx-500MS)

Tương tự như tính  $\sin \alpha$ .

Vì  $\cos \alpha < 0$  nên  $\alpha$  là góc tù.

Ấn liên tiếp các phím sau đây :



Ta được kết quả là :  $\alpha \approx 109^\circ 28' 16''$ .

## C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

2.1. Với những giá trị nào của góc  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ) thì :

a)  $\sin \alpha$  và  $\cos \alpha$  cùng dấu ?

b)  $\sin \alpha$  và  $\cos \alpha$  khác dấu ?

c)  $\sin \alpha$  và  $\tan \alpha$  cùng dấu ?

d)  $\sin \alpha$  và  $\tan \alpha$  khác dấu ?

2.2. Tính giá trị lượng giác của các góc sau đây :

a)  $120^\circ$  ;

b)  $150^\circ$  ;

c)  $135^\circ$ .

2.3. Tính giá trị của biểu thức :

a)  $2\sin 30^\circ + 3\cos 45^\circ - \sin 60^\circ$  ;

b)  $2\cos 30^\circ + 3\sin 45^\circ - \cos 60^\circ$ .

**2.4.** Rút gọn biểu thức :

a)  $4a^2 \cos^2 60^\circ + 2ab \cos^2 180^\circ + \frac{4}{3} b^2 \cos^2 30^\circ$  ;

b)  $(a \sin 90^\circ + b \tan 45^\circ)(a \cos 0^\circ + b \cos 180^\circ)$ .

**2.5.** Hãy tính và so sánh giá trị của từng cặp biểu thức sau đây :

a)  $A = \cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ$  và  $B = \cos 60^\circ + \sin 45^\circ$  ;

b)  $C = \frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ}$  và  $D = (-\tan 135^\circ) \cdot \tan 60^\circ$ .

**2.6.** Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$  với  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $\cos \alpha$  và  $\tan \alpha$ .

**2.7.** Cho  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ . Tính  $\sin \alpha$  và  $\tan \alpha$ .

**2.8.** Cho  $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$  với  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Tính  $\sin \alpha$  và  $\cos \alpha$ .

**2.9.** Biết  $\tan \alpha = \sqrt{2}$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = \frac{3 \sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ .

**2.10.** Biết  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ . Tính giá trị của biểu thức  $B = \frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{\cot \alpha + \tan \alpha}$ .

**2.11.** Chứng minh rằng với  $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$  ta có :

a)  $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$  ;

b)  $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$  ;

c)  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$ .

**2.12.** Chứng minh rằng biểu thức sau đây không phụ thuộc vào  $\alpha$  :

a)  $A = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$  ;

b)  $B = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha - 2 \sin^2 \alpha + 1$ .

## §2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

### A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Định nghĩa

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác vectơ  $\vec{0}$ . Tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một số, kí hiệu là  $\vec{a}.\vec{b}$ , được xác định bởi công thức sau :

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

**Lưu ý :**

- Với  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ , ta có :

$$\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

- $\vec{a}^2 = |\vec{a}|.|\vec{a}|\cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$ .

#### 2. Các tính chất của tích vô hướng

Với ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  bất kì và mọi số  $k$  ta có :

$$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a} \text{ (tính chất giao hoán) ;}$$

$$\vec{a}.( \vec{b} + \vec{c} ) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c} \text{ (tính chất phân phối) ;}$$

$$(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.(k\vec{b}) ;$$

$$\vec{a}^2 \geq 0 ;$$

$$\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}.$$

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$$

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$$

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2.$$

### 3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trong mặt phẳng tọa độ  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  cho hai vectơ  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2)$ .

Khi đó tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  là :  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ .

### 4. Ứng dụng của tích vô hướng

a) Tính độ dài của vectơ. Cho  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ , khi đó :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

b) Tính góc giữa hai vectơ. Cho  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2)$ , khi đó :

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

## B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN



### VẤN ĐỀ 1

Tính tích vô hướng của hai vectơ

#### 1. Phương pháp

- Áp dụng công thức của định nghĩa :  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ .
- Dùng tính chất phân phối :  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ .

#### 2. Các ví dụ

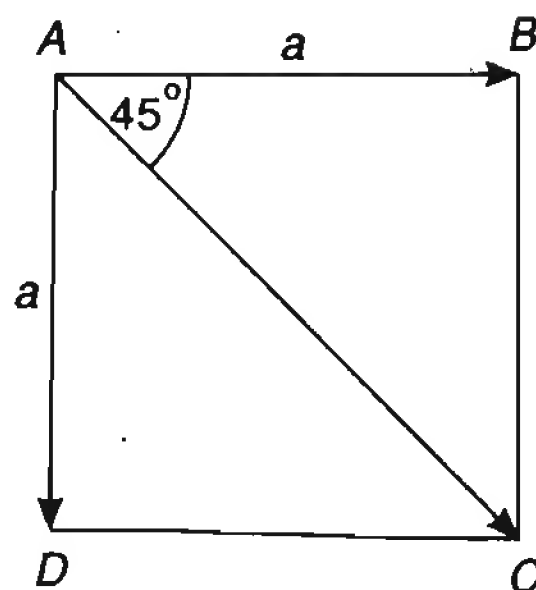


**Ví dụ 1.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ .

Tính tích  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

*GIẢI*

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos 90^\circ = 0$$



Hình 2.7



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos 45^\circ$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2 \text{ (h.2.7).}$$



**Ví dụ 2.** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$  có  $AC = 9$ ,  $CB = 5$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

*GIẢI*

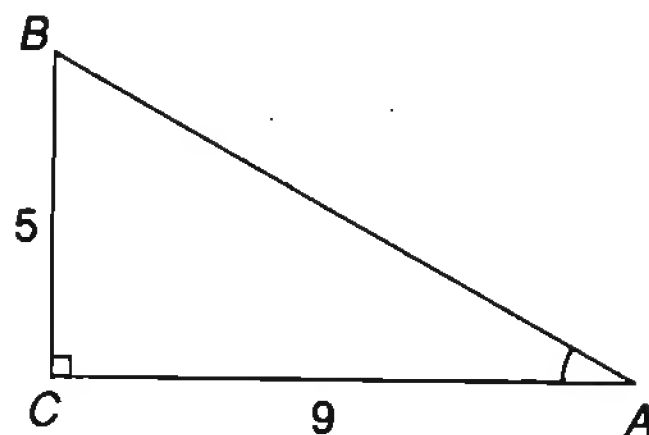
Ta có

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}),$$

$$\text{trong đó } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{AC}{AB}$$

(h.2.8).

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \frac{AC}{AB} = AC^2 = 9^2 = 81.$$



Hình 2.8



**Ví dụ 3.** Tam giác  $ABC$  có  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $\hat{B} = 60^\circ$  và  $AB = a$ . Tính :

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  ;

b)  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$  ;

c)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ .

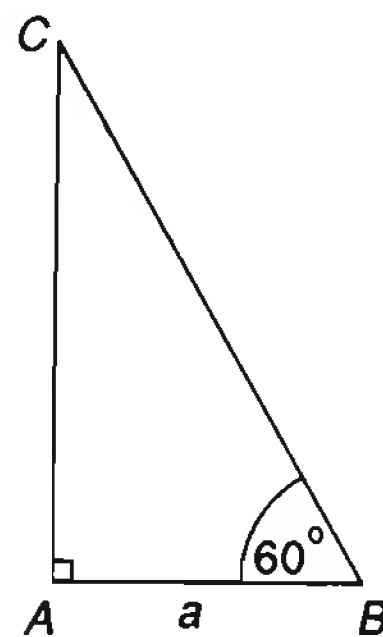
*GIẢI*

Ta có  $BC = 2a$ ,  $AC = a\sqrt{3}$  (h.2.9).

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos 90^\circ = 0.$

b)  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos 30^\circ = a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3a^2.$

c)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos 150^\circ = a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3a^2.$



Hình 2.9



## VẤN ĐỀ 2

Chứng minh các đẳng thức về vectơ có liên quan đến tích vô hướng

### 1. Phương pháp

- Sử dụng tính chất phân phối của tích vô hướng đối với phép cộng các vectơ.
- Dùng quy tắc ba điểm  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  hay quy tắc hiệu  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ .

### 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng với điểm  $M$  tùy ý ta có

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

GIẢI

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MB} \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC} \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} \quad (3)$$

Cộng các kết quả từ (1), (2), (3) ta được :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$



**Ví dụ 2.** Cho  $O$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  và  $M$  là một điểm tùy ý.

Chứng minh rằng :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = OM^2 - OA^2$ .

GIẢI

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) \\ &= \overrightarrow{MO}^2 + \underbrace{\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})}_{\vec{0}} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 \end{aligned}$$

(vì  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$  và  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}^2$ ).

Vậy  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = OM^2 - OA^2$  (vì  $\overrightarrow{OA}^2 = OA^2$ ,  $\overrightarrow{MO}^2 = OM^2$ ).



**Ví dụ 3.** Cho tam giác  $ABC$  với ba trung tuyến là  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$ .

Chứng minh rằng  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} = 0$ .

*GIẢI*

Ta có  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$  (h.2.10).

$$\begin{aligned} \text{Do đó } 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}. \end{aligned} \quad (1)$$

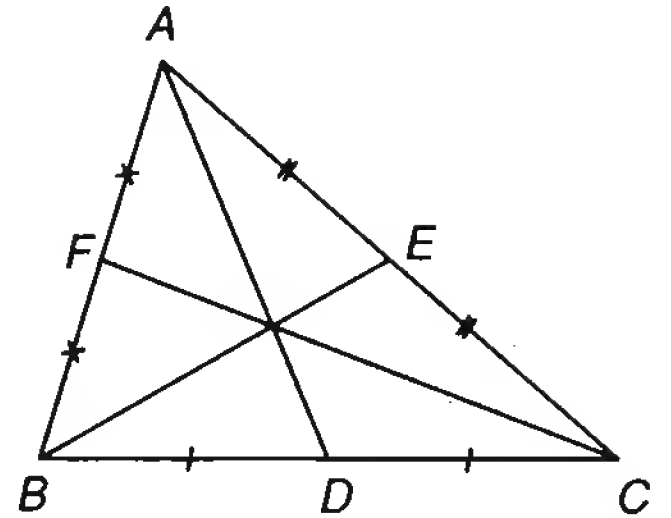
$$\text{Tương tự } 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA} \quad (2)$$

$$2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta suy ra

$$2(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF}) = 0$$

$$\text{hay } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} = 0.$$



Hình 2.10



### **VẤN ĐỀ 3**

Chứng minh sự vuông góc của hai vectơ

#### **1. Phương pháp**

Sử dụng tính chất của tích vô hướng :  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

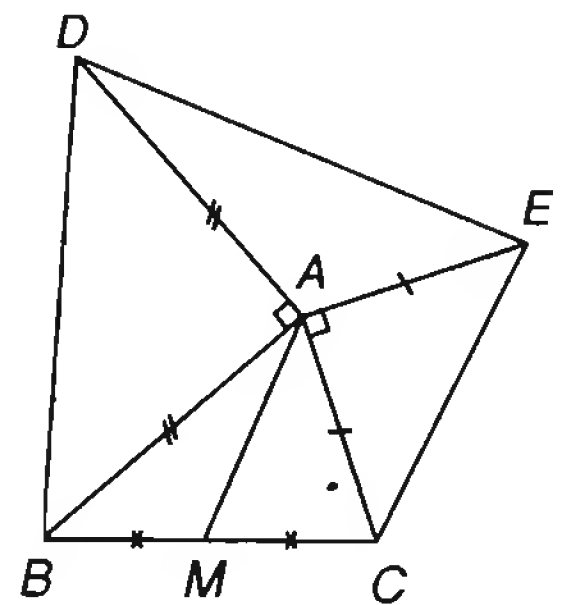
#### **2. Các ví dụ**



**Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$  có góc  $A$  nhọn. Vẽ bên ngoài tam giác  $ABC$  các tam giác vuông cân đỉnh  $A$  là  $ABD$  và  $ACE$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh rằng  $AM$  vuông góc với  $DE$ .

*GIẢI*

Ta chứng minh  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$  (h.2.11).



Hình 2.11

Ta có

$$\begin{aligned}
 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DE} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) \\
 &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} \\
 &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} \\
 &= AB.AE.\cos(90^\circ + A) - AC.AD\cos(90^\circ + A) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

(vì  $AB = AD, AE = AC$ ).

Vậy  $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{DE}$  suy ra  $AM$  vuông góc với  $DE$ .



**Ví dụ 2.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = a$  và  $AD = a\sqrt{2}$ .

Gọi  $K$  là trung điểm của cạnh  $AD$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{BK}$  vuông góc với  $\overrightarrow{AC}$ .

*GIẢI*

Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ .

Ta có  $AB = a, AC = BD = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$ .

Cần chứng minh  $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = 0$  (h.2.12).

Ta có  $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

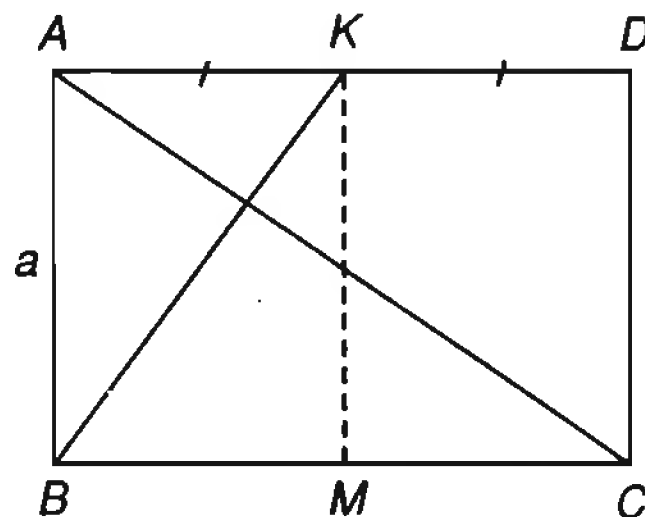
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

Vậy  $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

$$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}$$

$$= -a^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(a\sqrt{2})^2 = 0.$$

Do đó  $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = 0$ . Ta có  $\overrightarrow{BK}$  vuông góc với  $\overrightarrow{AC}$ .



Hình 2.12



#### **VẤN ĐỀ 4**

Biểu thức tọa độ của tích vô hướng và các ứng dụng : tính độ dài của một vectơ, tính khoảng cách giữa hai điểm, tính góc giữa hai vectơ

## 1. Phương pháp

- Cho hai vectơ  $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$  và  $\vec{b} = (b_1 ; b_2)$ . Ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ .
- Cho vectơ  $\vec{u} = (u_1 ; u_2)$ . Ta có  $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ .
- Cho hai điểm  $A = (x_A ; y_A)$ ,  $B = (x_B ; y_B)$ .

$$\text{Ta có } AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

- Tính góc giữa hai vectơ  $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$  và  $\vec{b} = (b_1 ; b_2)$ :

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

## 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Trong mặt phẳng Oxy cho  $A = (4 ; 6)$ ,  $B = (1 ; 4)$ ,  $C = \left(7 ; \frac{3}{2}\right)$ .

- Chứng minh rằng tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .
- Tính độ dài các cạnh  $AB$ ,  $AC$  và  $BC$  của tam giác đó.

*GIẢI*

a) Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-3 ; -2)$ ,  $\overrightarrow{AC} = \left(3 ; -\frac{9}{2}\right)$  và

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-3) \cdot 3 + (-2) \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = 0.$$

Vậy  $\overrightarrow{AB}$  vuông góc với  $\overrightarrow{AC}$  và tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

b)  $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$ ,

$$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9 + \frac{81}{4}} = \frac{\sqrt{117}}{2}.$$

Ta có  $\overrightarrow{BC} = \left(6 ; -\frac{5}{2}\right)$  và

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{36 + \frac{25}{4}} = \frac{13}{2}.$$

*Nhận xét.* Có thể chứng minh tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  bằng cách chứng minh rằng  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .



**Ví dụ 2.** Tính góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  trong các trường hợp sau :

a)  $\vec{a} = (1 ; -2), \vec{b} = (-1 ; -3) ;$

b)  $\vec{a} = (3 ; -4), \vec{b} = (4 ; 3) ;$

c)  $\vec{a} = (2 ; 5), \vec{b} = (3 ; -7).$

*GIẢI*

$$\text{a) } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-3)}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{1+9}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy  $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ.$

$$\text{b) } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 \cdot 4 + (-4) \cdot 3}{\sqrt{9+16} \cdot \sqrt{16+9}} = \frac{0}{25} = 0.$$

Vậy  $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ.$

$$\text{c) } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot (-7)}{\sqrt{4+25} \cdot \sqrt{9+49}} = \frac{-29}{29\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy  $(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ.$



**Ví dụ 3.** Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm  $A(2 ; 4)$  và  $B(1 ; 1)$ . Tìm toạ độ điểm  $C$  sao cho tam giác  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $B$ .

*GIẢI*

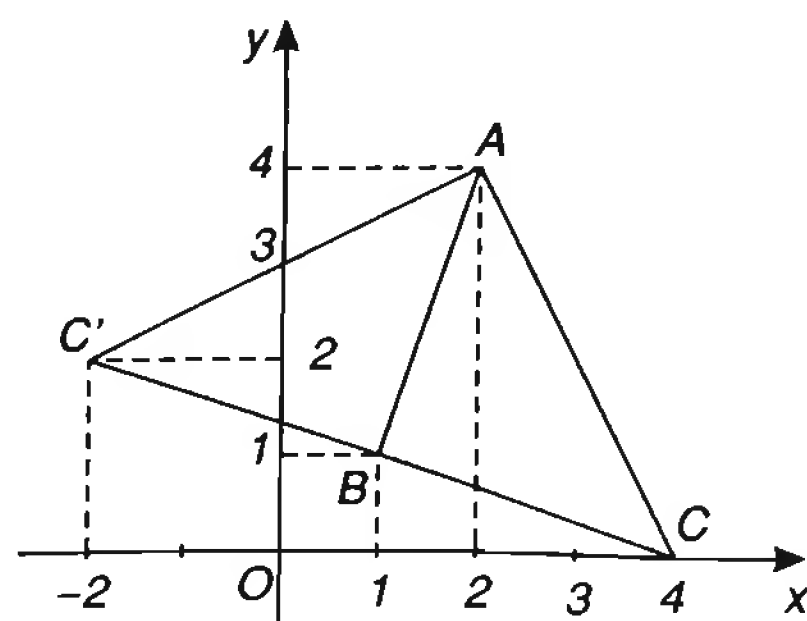
Giả sử điểm  $C$  cần tìm có toạ độ là  $(x ; y)$ . Để  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $B$  ta phải có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}| \end{cases}$$

với  $\overrightarrow{BA} = (1 ; 3)$  và  $\overrightarrow{BC} = (x - 1 ; y - 1)$ .

Điều đó có nghĩa là :

$$\begin{cases} 1 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 1) = 0 \\ 1^2 + 3^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \end{cases}$$



Hình 2.13

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 3y \\ (3 - 3y)^2 + (y - 1)^2 = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 3y \\ 10y^2 - 20y = 0. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta tìm được toạ độ hai điểm  $C$  và  $C'$  thoả mãn điều kiện của bài toán :

$$C = (4 ; 0) \text{ và } C' = (-2 ; 2) \text{ (h.2.13).}$$

### C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

**2.13.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác vectơ  $\vec{0}$ . Tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  khi nào dương, khi nào âm và khi nào bằng 0 ?

**2.14.** Áp dụng tính chất giao hoán và tính chất phân phối của tích vô hướng hãy chứng minh các kết quả sau đây :

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} ;$$

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} ;$$

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 .$$

**2.15.** Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  và có  $AB = AC = a$ . Tính :

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  ;      b)  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$  ;      c)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

**2.16.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 5$  cm,  $BC = 7$  cm,  $CA = 8$  cm.

a) Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  rồi suy ra giá trị của góc  $A$  ;

b) Tính  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ .

**2.17.** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 6$  cm,  $AC = 8$  cm,  $BC = 11$  cm.

a) Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  và chứng tỏ rằng tam giác  $ABC$  có góc  $A$  tù.

b) Trên cạnh  $AB$  lấy điểm  $M$  sao cho  $AM = 2$  cm và gọi  $N$  là trung điểm của cạnh  $AC$ . Tính  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ .

- 2.18. Cho tam giác  $ABC$  cân ( $AB = AC$ ). Gọi  $H$  là trung điểm của cạnh  $BC$ ,  $D$  là hình chiếu vuông góc của  $H$  trên cạnh  $AC$ ,  $M$  là trung điểm của đoạn  $HD$ . Chứng minh rằng  $AM$  vuông góc với  $BD$ .
- 2.19. Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có  $|\vec{a}| = 5$ ,  $|\vec{b}| = 12$  và  $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$ . Tính tích vô hướng  $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$  và suy ra góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{a} + \vec{b}$ .
- 2.20. Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $H$  là trực tâm của tam giác và  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4} BC^2$ .
- 2.21. Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .
- 2.22. Cho tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  vuông góc với nhau và cắt nhau tại  $M$ . Gọi  $P$  là trung điểm của cạnh  $AD$ . Chứng minh rằng  $MP$  vuông góc với  $BC$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$ .
- 2.23. Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho tam giác  $ABC$  với  $A = (2 ; 4)$ ,  $B = (-3 ; 1)$  và  $C = (3 ; -1)$ . Tính :
- Toạ độ điểm  $D$  để tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành ;
  - Toạ độ chân  $A'$  của đường cao vẽ từ đỉnh  $A$ .
- 2.24. Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A = (-1 ; 1)$ ,  $B = (1 ; 3)$  và  $C = (1 ; -1)$ . Chứng minh tam giác  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$ .
- 2.25. Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho bốn điểm  $A(-1 ; 1)$ ,  $B(0 ; 2)$ ,  $C(3 ; 1)$  và  $D(0 ; -2)$ . Chứng minh rằng tứ giác  $ABCD$  là hình thang cân.
- 2.26. Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho ba điểm  $A(-1 ; -1)$ ,  $B(3 ; 1)$  và  $C(6 ; 0)$ .
- Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.
  - Tính góc  $B$  của tam giác  $ABC$ .
- 2.27. Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho hai điểm  $A(5 ; 4)$  và  $B(3 ; -2)$ . Một điểm  $M$  di động trên trục hoành  $Ox$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ .
- 2.28. Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho bốn điểm  $A(3 ; 4)$ ,  $B(4 ; 1)$ ,  $C(2 ; -3)$ ,  $D(-1 ; 6)$ . Chứng minh rằng tứ giác  $ABCD$  nội tiếp được trong một đường tròn.



### §3. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

#### A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ , đường cao  $AH = h_a$  và các đường trung tuyến  $AM = m_a$ ,  $BN = m_b$ ,  $CP = m_c$  (h.2.14).

##### 1. Định lí côsin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

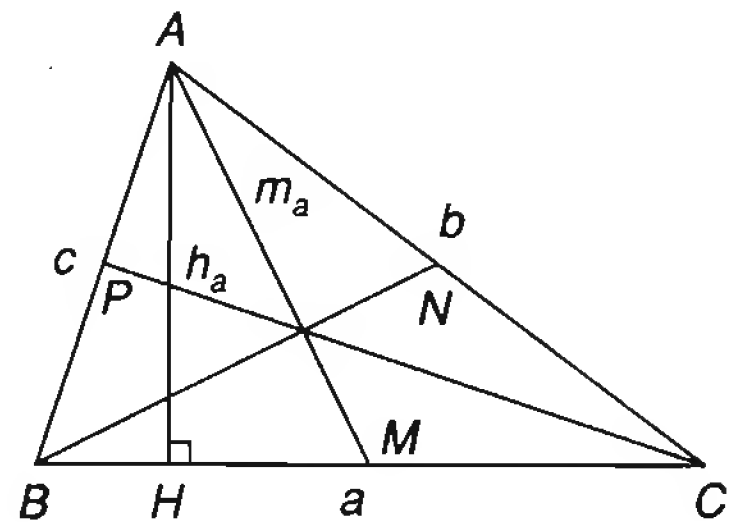
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Hệ quả :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$



Hình 2.14

##### 2. Định lí sin

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (R \text{ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác } ABC).$$

##### 3. Độ dài đường trung tuyến của tam giác

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4};$$

$$m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4};$$

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}.$$

#### 4. Các công thức tính diện tích tam giác

Diện tích  $S$  của tam giác  $ABC$  được tính theo các công thức :

- $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$  với  $h_a, h_b, h_c$  lần lượt là các đường cao của tam giác  $ABC$  ;
- $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B$  ;
- $S = \frac{abc}{4R}$  với  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  ;
- $S = pr$  với  $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$  và  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  ;
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  với  $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$  (công thức Hê-rông).

#### B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN



##### VẤN ĐỀ 1

Tính một số yếu tố trong tam giác theo một số yếu tố cho trước (trong đó có ít nhất là một cạnh)

##### 1. Phương pháp

- Sử dụng trực tiếp định lí côsin và định lí sin.
- Chọn các hệ thức lượng thích hợp đối với tam giác để tính một số yếu tố trung gian cần thiết để việc giải toán thuận lợi hơn.

##### 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$  có  $b = 7$  cm,  $c = 5$  cm và  $\cos A = \frac{3}{5}$ .

a) Tính  $a$ ,  $\sin A$  và diện tích  $S$  của tam giác  $ABC$ .

b) Tính đường cao  $h_a$  xuất phát từ đỉnh  $A$  và bán kính  $R$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

**GIẢI**

a) Theo định lí côsin ta có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5} \text{ (vì } \sin A > 0 \text{)}.$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 14 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$\text{b) } h_a = \frac{2S}{a} = \frac{28}{4\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \text{ (cm)}.$$

$$\text{Theo định lí sin : } \frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{4\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{4}{5}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ (cm)}.$$



**Ví dụ 2.** Cho tam giác  $ABC$  biết  $\hat{A} = 60^\circ$ ,  $b = 8 \text{ cm}$ ,  $c = 5 \text{ cm}$ .

Tính đường cao  $h_a$  và bán kính  $R$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

**GIẢI**

$$\begin{aligned} \text{Theo định lí côsin ta có : } a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 49. \end{aligned}$$

Vậy  $a = 7 \text{ (cm)}$ .

Theo công thức tính diện tích tam giác  $S = \frac{1}{2} bc \sin A$ , ta có :

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$\text{Mặt khác } S = \frac{1}{2} a \cdot h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{20\sqrt{3}}{7} \text{ (cm)}.$$

$$\text{Từ công thức } S = \frac{abc}{4R} \text{ ta có } R = \frac{abc}{4S} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 5}{40\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \text{ (cm)}.$$



**Ví dụ 3.** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 5$  cm,  $BC = 7$  cm,  $CA = 8$  cm.

a) Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  ;

b) Tính góc  $A$ .

*GIẢI*

a) Ta có  $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ .

Do đó  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{BC}^2) = \frac{1}{2}(5^2 + 8^2 - 7^2) = 20$ .

Vậy  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 20$ .

b) Theo định nghĩa :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos A$ . Ta có :

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{20}{5 \cdot 8} = \frac{1}{2}.$$

Vậy  $\hat{A} = 60^\circ$ .



**Ví dụ 4.** Cho tam giác  $ABC$  biết  $a = 21$  cm,  $b = 17$  cm,  $c = 10$  cm.

a) Tính diện tích  $S$  của tam giác  $ABC$  và chiều cao  $h_a$ .

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp  $r$  của tam giác.

c) Tính độ dài đường trung tuyến  $m_a$  phát xuất từ đỉnh  $A$  của tam giác.

*GIẢI*

a) Ta có  $p = \frac{21 + 17 + 10}{2} = 24$  (cm).

Theo công thức Hê-rông ta có

$$S = \sqrt{24(24 - 21)(24 - 17)(24 - 10)} = 84 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Do đó  $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 84}{21} = 8$  (cm).

b) Ta có  $S = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{84}{24} = 3,5$  (cm).

c) Độ dài đường trung tuyến  $m_a$  được tính theo công thức :

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

$$\text{Do đó } m_a^2 = \frac{17^2 + 10^2}{2} - \frac{21^2}{4} = \frac{337}{4} = 84,25$$

$$\Rightarrow m_a = \sqrt{84,25} \approx 9,18 \text{ (cm)}.$$



**Ví dụ 5.** Cho tam giác  $ABC$  biết  $a = \sqrt{6}$  cm,  $b = 2$  cm,  $c = (1 + \sqrt{3})$  cm. Tính các góc  $A, B$ , chiều cao  $h_a$  và bán kính đường tròn ngoại tiếp  $R$  của tam giác  $ABC$ .

*GIẢI*

Theo định lí côsin ta có :  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4 + (1 + \sqrt{3})^2 - 6}{4 \cdot (1 + \sqrt{3})} = \frac{1}{2}.$

Vậy  $\hat{A} = 60^\circ$ .

Tương tự,  $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2 + 6 - 4}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot (1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Vậy  $\hat{B} = 45^\circ$ .

Ta có  $\sin B = \frac{h_a}{c} \Rightarrow h_a = c \cdot \sin B = (1 + \sqrt{3}) \cdot \sin 45^\circ = \frac{(1 + \sqrt{3})\sqrt{2}}{2}$  (cm).

Áp dụng định lí sin :  $\frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow R = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$  (cm).



## **VẤN ĐỀ 2**

Chứng minh các hệ thức về mối quan hệ giữa các yếu tố của một tam giác

### **1. Phương pháp**

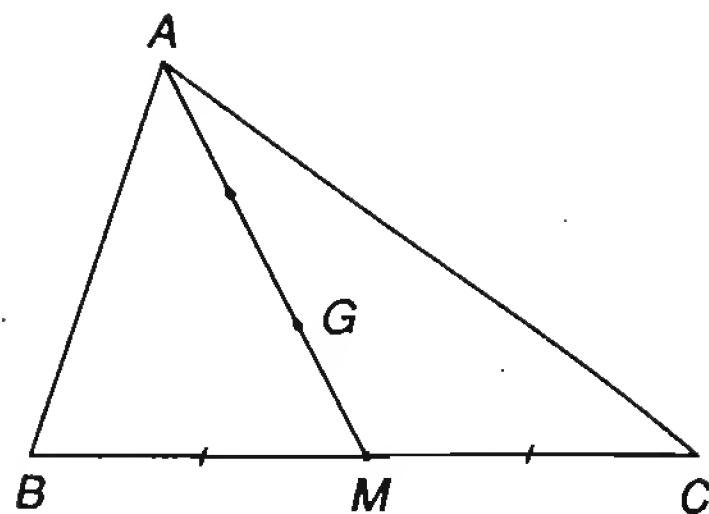
Dùng các hệ thức cơ bản để biến đổi vế này thành vế kia hoặc chứng minh cả hai vế cùng bằng một biểu thức nào đó, hoặc chứng minh hệ thức cần chứng minh tương đương với một hệ thức đã biết là đúng. Khi chứng minh cần khai thác các giả thiết và kết luận để tìm được các hệ thức thích hợp làm trung gian cho quá trình biến đổi.

## 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm. Gọi  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ . Chứng minh rằng :

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$



Hình 2.15

*GIẢI*

Theo tính chất của trọng tâm ta có  $GA = \frac{2}{3} AM \Rightarrow GA^2 = \frac{4}{9} AM^2$  (h.2.15).

Áp dụng công thức tính trung tuyến của một tam giác ta có :

$$AM^2 = \frac{1}{2} \left( AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( c^2 + b^2 - \frac{a^2}{2} \right)$$

$$GA^2 = \frac{4}{9} AM^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} \left( c^2 + b^2 - \frac{a^2}{2} \right) = \frac{2}{9} \left( b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} \right).$$

Tương tự,  $GB^2 = \frac{2}{9} \left( a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2} \right)$

$$GC^2 = \frac{2}{9} \left( a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2} \right).$$

$$\text{Do đó } GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{2}{9} \left[ \frac{3}{2} (a^2 + b^2 + c^2) \right] = \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2).$$



**Ví dụ 2.** Tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Chứng minh rằng :

$$a = b \cos C + c \cos B.$$

*GIẢI*

Theo định lí côsin ta có  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ .

$$\Rightarrow c \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow b \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \quad (2)$$

$$\text{Cộng từng vế của (1) và (2) ta có : } b \cos C + c \cos B = \frac{2a^2}{2a} = a.$$



**Ví dụ 3.** Tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  và đường trung tuyến  $AM = c = AB$ . Chứng minh rằng :

a)  $a^2 = 2(b^2 - c^2)$  ;

b)  $\sin^2 A = 2(\sin^2 B - \sin^2 C)$ .

*GIẢI*

(Xem h.2.16)

a) Theo định lí về trung tuyến của tam giác ta có :

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2 = \frac{a^2}{2} + 2c^2$$

$$\Rightarrow a^2 = 2(b^2 - c^2).$$

b) Theo định lí sin ta có :

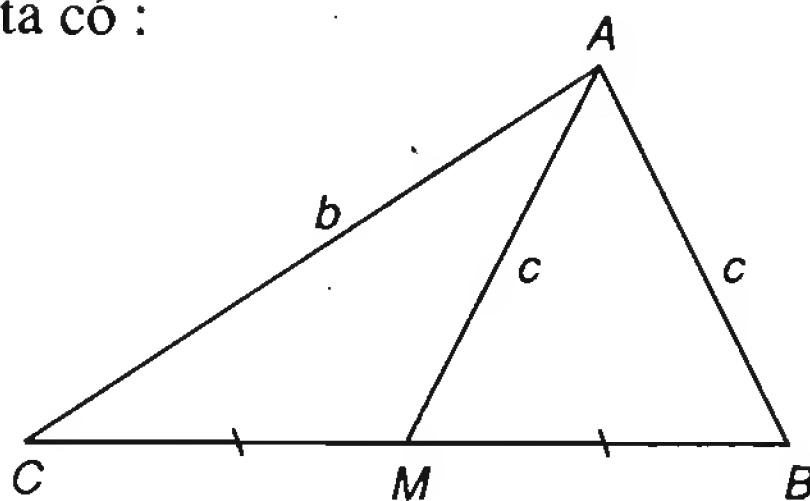
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{b^2}{\sin^2 B} = \frac{c^2}{\sin^2 C} = \frac{b^2 - c^2}{\sin^2 B - \sin^2 C}. \quad (*)$$

Thay  $a^2 = 2(b^2 - c^2)$  vào (\*) ta có :

$$\frac{2(b^2 - c^2)}{\sin^2 A} = \frac{b^2 - c^2}{\sin^2 B - \sin^2 C} \Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 A} = \frac{1}{\sin^2 B - \sin^2 C}$$

$$\Rightarrow \sin^2 A = 2(\sin^2 B - \sin^2 C).$$



Hình 2.16



**Ví dụ 4.** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có các cạnh góc vuông là  $b$  và  $c$ . Lấy một điểm  $M$  trên cạnh  $BC$  và cho  $\widehat{BAM} = \alpha$ . Chứng minh rằng :

$$AM = \frac{bc}{b \cos \alpha + c \sin \alpha}.$$

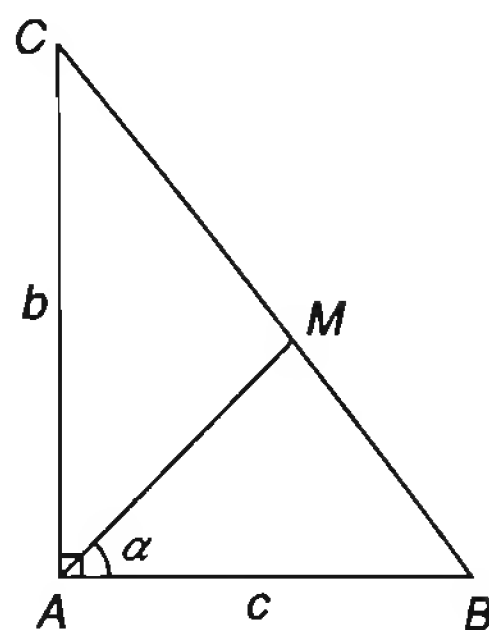
GIẢI

$$S_{ABC} = S_{MAB} + S_{MAC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}AM \cdot c \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2}AM \cdot b \cdot \sin (90^\circ - \alpha)$$

$$\text{hay } bc = AM (c \sin \alpha + b \cos \alpha) \text{ (h.2.17).}$$

$$\text{Vậy } AM = \frac{bc}{b \cos \alpha + c \sin \alpha}.$$



Hình 2.17



### VẤN ĐỀ 3

Giải tam giác

#### 1. Phương pháp

Một tam giác thường được xác định khi biết ba yếu tố. Trong các bài toán giải tam giác, người ta thường cho tam giác với ba yếu tố như sau :

- Biết một cạnh và hai góc kề cạnh đó (g, c, g) ;
- Biết một góc và hai cạnh kề góc đó (c, g, c) ;
- Biết ba cạnh (c, c, c).

Để tìm các yếu tố còn lại của tam giác người ta thường sử dụng các định lí côsin, định lí sin, định lí tổng ba góc của một tam giác bằng  $180^\circ$  và đặc biệt có thể sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông.

#### 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Giải tam giác  $ABC$  biết  $b = 14$ ,  $c = 10$ ,  $\widehat{A} = 145^\circ$ .



GIẢI

$$\begin{aligned}\text{Ta có } a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 14^2 + 10^2 - 2.14.10.\cos 145^\circ \\ &\approx 196 + 100 - 280.(-0,8191) \approx 525,35.\end{aligned}$$

Vậy  $a \approx 23$ .

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a} = \frac{14 \cdot \sin 145^\circ}{23} \approx 0,34913 \Rightarrow \hat{B} \approx 20^\circ 26'$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 180^\circ - (145^\circ + 20^\circ 26') = 14^\circ 34'.$$

 **Ví dụ 2.** Giải tam giác  $ABC$  biết  $a = 4$ ,  $b = 5$ ,  $c = 7$ .

GIẢI

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 7^2 - 4^2}{2.5.7} = \frac{58}{70} \approx 0,8286 \Rightarrow \hat{A} \approx 34^\circ 3'.$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4^2 + 7^2 - 5^2}{2.4.7} = \frac{40}{56} \approx 0,71428 \Rightarrow \hat{B} \approx 44^\circ 25'.$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 180^\circ - (34^\circ 3' + 44^\circ 25') = 101^\circ 32'.$$

## C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

**2.29.** Tam giác  $ABC$  có cạnh  $a = 2\sqrt{3}$ ,  $b = 2$  và  $\hat{C} = 30^\circ$ .

a) Tính cạnh  $c$ , góc  $A$  và diện tích  $S$  của tam giác  $ABC$ ;

b) Tính chiều cao  $h_a$  và đường trung tuyến  $m_a$  của tam giác  $ABC$ .

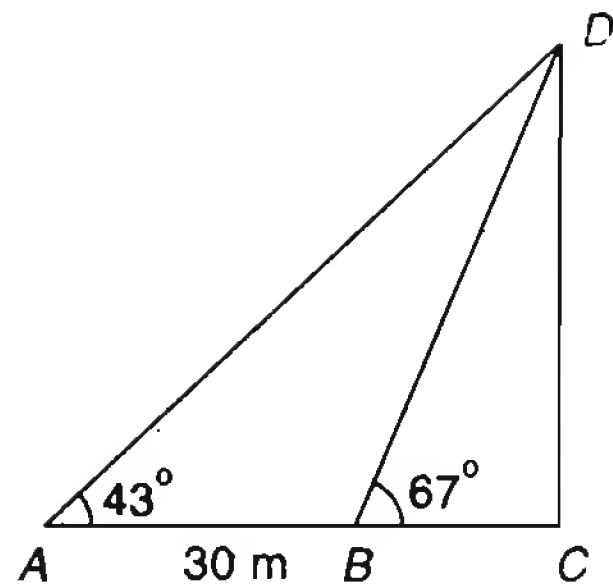
**2.30.** Tính góc lớn nhất của tam giác  $ABC$  biết  $a = 3$ ,  $b = 4$ ,  $c = 6$ . Tính đường cao ứng với cạnh lớn nhất của tam giác.

**2.31.** Tam giác  $ABC$  có  $a = 2\sqrt{3}$ ,  $b = 2\sqrt{2}$ ,  $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ . Tính các góc  $A$ ,  $B$  và các độ dài  $h_a$ ,  $R$ ,  $r$  của tam giác đó.

**2.32.** Tam giác  $ABC$  có  $a = 4\sqrt{7}$  cm,  $b = 6$  cm,  $c = 8$  cm. Tính diện tích  $S$ , đường cao  $h_a$  và bán kính  $R$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

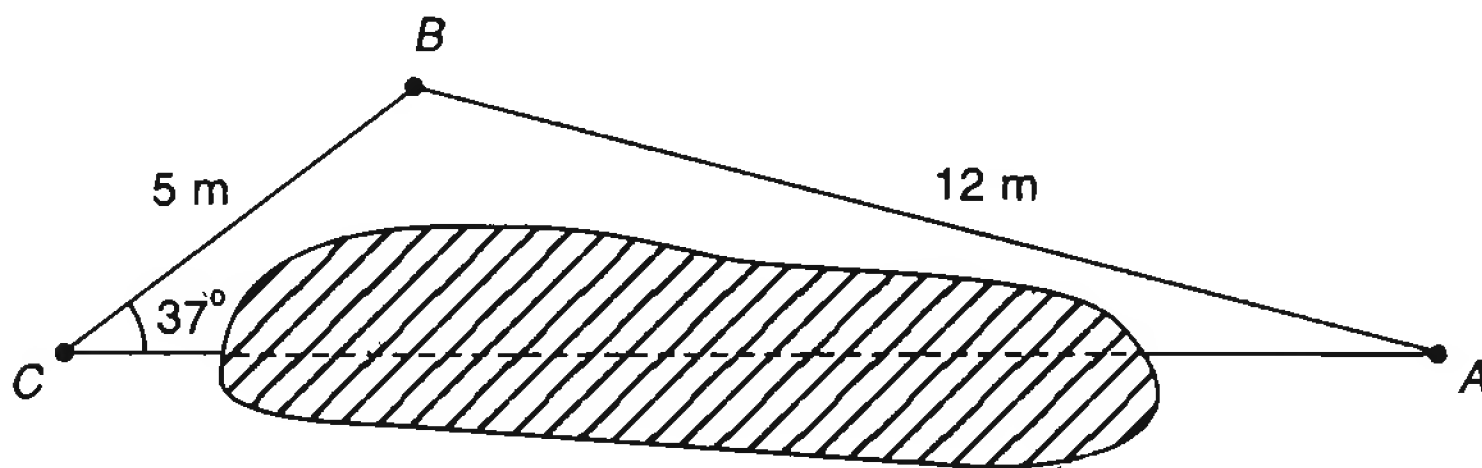


- 2.43. Giả sử chúng ta cần đo chiều cao  $CD$  của một cái tháp với  $C$  là chân tháp,  $D$  là đỉnh tháp. Vì không thể đến chân tháp được nên từ hai điểm  $A, B$  có khoảng cách  $AB = 30$  m sao cho ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng người ta đo được các góc  $\widehat{CAD} = 43^\circ$ ,  $\widehat{CBD} = 67^\circ$  (h.2.18). Hãy tính chiều cao  $CD$  của tháp.



Hình 2.18

- 2.44. Khoảng cách từ  $A$  đến  $C$  không thể đo trực tiếp vì phải qua một đầm lầy nên người ta làm như sau : Xác định một điểm  $B$  có khoảng cách  $AB = 12$  m và đo được góc  $\widehat{ACB} = 37^\circ$  (h.2.19). Hãy tính khoảng cách  $AC$  biết rằng  $BC = 5$  m.



Hình 2.19

## CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

- 2.45. Cho tam giác  $ABC$  thoả mãn điều kiện  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ . Vậy tam giác  $ABC$  là tam giác gì ?
- 2.46. Ba điểm  $A, B, C$  phân biệt tạo nên vector  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  vuông góc với vector  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$ . Vậy tam giác  $ABC$  là tam giác gì ?
- 2.47. Tính các cạnh còn lại của tam giác  $ABC$  trong mỗi trường hợp sau :
- $a = 7, \quad b = 10, \quad \widehat{C} = 56^\circ 29'$  ;
  - $a = 2, \quad c = 3, \quad \widehat{B} = 123^\circ 17'$  ;
  - $b = 0.4, \quad c = 12, \quad \widehat{A} = 23^\circ 28'$ .

- 2.48. Tam giác  $ABC$  có  $\hat{B} = 60^\circ$ ,  $\hat{C} = 45^\circ$ ,  $BC = a$ . Tính độ dài hai cạnh  $AB$  và  $AC$ .
- 2.49. Tam giác  $ABC$  có  $\hat{A} = 60^\circ$ ,  $b = 20$ ,  $c = 35$ .
- Tính chiều cao  $h_a$ ;
  - Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác;
  - Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.
- 2.50. Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Chứng minh rằng  $b^2 - c^2 = a(b \cos C - c \cos B)$ .
- 2.51. Tam giác  $ABC$  có  $BC = 12$ ,  $CA = 13$ , trung tuyến  $AM = 8$ .
- Tính diện tích tam giác  $ABC$ ;
  - Tính góc  $B$ .
- 2.52. Giải tam giác  $ABC$  biết:  $a = 14$ ;  $b = 18$ ;  $c = 20$ .
- 2.53. Giải tam giác  $ABC$  biết:  $\hat{A} = 60^\circ$ ;  $\hat{B} = 40^\circ$ ;  $c = 14$ .
- 2.54. Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 49,4$ ;  $b = 26,4$ ;  $\hat{C} = 47^\circ 20'$ . Tính  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  và cạnh  $c$ .

### CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

- 2.55. Tam giác  $ABC$  có  $AB = 2$  cm,  $AC = 1$  cm,  $\hat{A} = 60^\circ$ . Khi đó độ dài cạnh  $BC$  là:
- |                    |                    |
|--------------------|--------------------|
| (A) 1 cm;          | (B) 2 cm;          |
| (C) $\sqrt{3}$ cm; | (D) $\sqrt{5}$ cm. |
- 2.56. Tam giác  $ABC$  có  $a = 5$  cm,  $b = 3$  cm,  $c = 5$  cm. Khi đó số đo của góc  $\widehat{BAC}$  là:
- |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|
| (A) $\hat{A} = 45^\circ$ ; | (B) $\hat{A} = 30^\circ$ ; |
| (C) $\hat{A} > 60^\circ$ ; | (D) $\hat{A} = 90^\circ$ . |
- 2.57. Tam giác  $ABC$  có  $AB = 8$  cm,  $BC = 10$  cm,  $CA = 6$  cm. Đường trung tuyến  $AM$  của tam giác đó có độ dài bằng:
- |           |           |
|-----------|-----------|
| (A) 4 cm; | (B) 5 cm; |
| (C) 6 cm; | (D) 7 cm. |

- 2.58.** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 6$  cm,  $BC = 10$  cm. Đường tròn nội tiếp tam giác đó có bán kính  $r$  bằng :
- (A) 1 cm ; (B)  $\sqrt{2}$  cm ;  
(C) 2 cm ; (D) 3 cm.
- 2.59.** Tam giác  $ABC$  có  $a = \sqrt{3}$  cm,  $b = \sqrt{2}$  cm ;  $c = 1$  cm. Đường trung tuyến  $m_a$  có độ dài là :
- (A) 1 cm ; (B) 1,5 cm ;  
(C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  cm ; (D) 2,5 cm.
- 2.60.** Tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính  $R = 4$  cm có diện tích là :
- (A)  $13 \text{ cm}^2$  ; (B)  $13\sqrt{2} \text{ cm}^2$  ;  
(C)  $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$  ; (D)  $15 \text{ cm}^2$ .
- 2.61.** Tam giác  $ABC$  vuông và cân tại  $A$  có  $AB = a$ . Đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  có bán kính  $r$  bằng :
- (A)  $\frac{a}{2}$  ; (B)  $\frac{a}{\sqrt{2}}$  ;  
(C)  $\frac{a}{2 + \sqrt{2}}$  ; (D)  $\frac{a}{3}$ .
- 2.62.** Tam giác  $ABC$  có các cạnh  $a, b, c$  thoả mãn điều kiện :
- $$(a + b + c)(a + b - c) = 3ab.$$
- Khi đó số đo của góc  $C$  là :
- (A)  $120^\circ$  ; (B)  $30^\circ$  ;  
(C)  $45^\circ$  ; (D)  $60^\circ$ .
- 2.63.** Hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = a$ ,  $BC = a\sqrt{2}$  và  $\widehat{BAD} = 45^\circ$ . Khi đó hình bình hành có diện tích bằng :
- (A)  $2a^2$  ; (B)  $a^2\sqrt{2}$  ;  
(C)  $a^2$  ; (D)  $a^2\sqrt{3}$ .

- 2.64.** Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $AB = AC = a$ . Đường trung tuyến  $BM$  có độ dài là :
- (A)  $1,5 a$  ; (B)  $a\sqrt{2}$  ;  
 (C)  $a\sqrt{3}$  ; (D)  $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ .
- 2.65.** Tam giác đều cạnh  $a$  nội tiếp trong đường tròn bán kính  $R$ . Khi đó bán kính  $R$  bằng :
- (A)  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$  ; (B)  $\frac{a\sqrt{2}}{3}$  ;  
 (C)  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$  ; (D)  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ .
- 2.66.** Bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh  $a$  bằng :
- (A)  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$  ; (B)  $\frac{a\sqrt{2}}{5}$  ;  
 (C)  $\frac{a\sqrt{3}}{6}$  ; (D)  $\frac{a\sqrt{5}}{7}$ .
- 2.67.** Cho tam giác  $ABC$  có cạnh  $BC = a$ , cạnh  $CA = b$ . Tam giác  $ABC$  có diện tích lớn nhất khi góc  $C$  bằng :
- (A)  $60^\circ$  ; (B)  $90^\circ$  ;  
 (C)  $150^\circ$  ; (D)  $120^\circ$ .
- 2.68.** Cho tam giác  $ABC$  có diện tích  $S$ . Nếu tăng độ dài mỗi cạnh  $BC$  và  $AC$  lên hai lần đồng thời giữ nguyên độ lớn của góc  $C$  thì diện tích của tam giác mới được tạo nên là :
- (A)  $2S$  ; (B)  $3S$  ;  
 (C)  $4S$  ; (D)  $5S$ .
- 2.69.** Cho góc  $\widehat{xOy} = 30^\circ$ . Gọi  $A$  và  $B$  là hai điểm di động lần lượt trên  $Ox$  và  $Oy$  sao cho  $AB = 2$ . Độ dài lớn nhất của đoạn  $OB$  bằng :
- (A)  $2$  ; (B)  $3$  ;  
 (C)  $4$  ; (D)  $5$ .

- 2.70.** Cho hai điểm  $A(0 ; 1)$  và  $B(3 ; 0)$ . Khoảng cách giữa hai điểm  $A$  và  $B$  là :
- (A) 3 ; (B) 4 ;  
(C)  $\sqrt{5}$  ; (D)  $\sqrt{10}$  .
- 2.71.** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho ba điểm  $A(-1 ; 1)$ ,  $B(2 ; 4)$ ,  $C(6 ; 0)$ . Khi đó tam giác  $ABC$  là tam giác :
- (A) Có ba góc nhọn ;  
(B) Có một góc vuông ;  
(C) Có một góc tù ;  
(D) Đều.

## HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

### §1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ TỪ $0^\circ$ ĐẾN $180^\circ$

- 2.1.**
- a)  $\sin \alpha$  và  $\cos \alpha$  cùng dấu khi :  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$
  - b)  $\sin \alpha$  và  $\cos \alpha$  khác dấu khi :  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$
  - c)  $\sin \alpha$  và  $\tan \alpha$  cùng dấu khi :  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$
  - d)  $\sin \alpha$  và  $\tan \alpha$  khác dấu khi :  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  .
- 2.2.**
- a)  $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ;  $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$  ;  $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$  ;  $\cot 120^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  .
  - b)  $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$  ;  $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  ;  $\tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  ;  $\cot 150^\circ = -\sqrt{3}$  .
  - c)  $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ;  $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  ;  $\tan 135^\circ = -1$  ;  $\cot 135^\circ = -1$  .

$$2.3. \quad a) \quad 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2} ;$$

$$b) \quad 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 1}{2}.$$

$$2.4. \quad a) \quad 4a^2 \cdot \frac{1}{4} + 2ab \cdot 1 + \frac{4}{3}b^2 \cdot \frac{3}{4} = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 ;$$

$$b) \quad (a \cdot 1 + b \cdot 1) (a \cdot 1 + b \cdot (-1)) = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

$$2.5. \quad a) \quad A < B ;$$

$$b) \quad C = D.$$

$$2.6. \quad \cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4} ; \quad \tan \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

$$2.7. \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{14}}{4} ; \quad \tan \alpha = -\sqrt{7}.$$

$$2.8. \quad \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} ; \quad \cos \alpha = \frac{1}{3}.$$

$$2.9. \quad A = 7 - 4\sqrt{2}.$$

$$2.10. \quad B = \frac{1}{9}.$$

$$2.11. \quad a) \quad (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x \\ = 1 + 2\sin x \cos x.$$

$$b) \quad (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x \\ = 1 - 2\sin x \cos x.$$

$$c) \quad \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 + 2\sin^2 x \cos^2 x - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x.$$

$$2.12. \quad a) \quad A = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 \\ = 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha + 1 - 2\sin \alpha \cos \alpha \\ = 2.$$



$$\begin{aligned}
 \text{b) } B &= \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha - 2 \sin^2 \alpha + 1 \\
 &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - 2 \sin^2 \alpha + 1 \\
 &= 1[\sin^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)] - 2 \sin^2 \alpha + 1 = 0.
 \end{aligned}$$

## §2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

**2.13.** Ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

Do đó  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$  khi  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) > 0$  nghĩa là  $0 \leq (\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$

$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$  khi  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) < 0$  nghĩa là  $90^\circ < (\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  khi  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$  nghĩa là  $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ .

**2.14.** 
$$\begin{aligned}
 (\vec{a} + \vec{b})^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\
 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}
 \end{aligned}$$

Các tính chất còn lại được chứng minh tương tự.

**2.15.** a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$  (h.2.20).

b)  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^2$ .

c)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = -a^2$ .

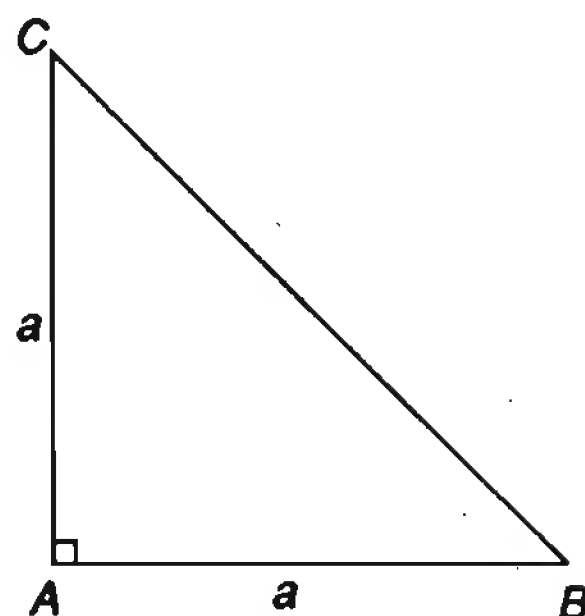
**2.16.** a) Ta có  $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$

$$= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Do đó 
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2}{2} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2} = 20.$$

Mặt khác  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = 5 \cdot 8 \cdot \cos A = 20$ ,

suy ra  $\cos A = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$ .



Hình 2.20

b) Ta có  $BA^2 = \overrightarrow{BA}^2 = (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB})^2 = \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 - 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ .

Do đó  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(CA^2 + CB^2 - BA^2) = \frac{1}{2}(8^2 + 7^2 - 5^2) = 44$ .

2.17. a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AC^2 + AB^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(8^2 + 6^2 - 11^2) = -\frac{21}{2}$

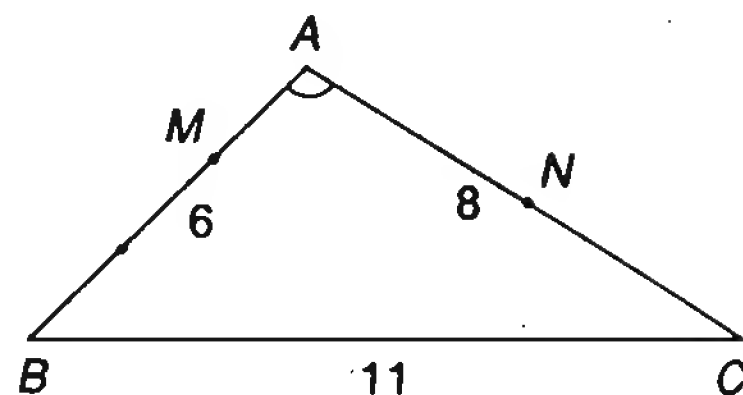
$$= AB \cdot AC \cdot \cos A = -\frac{21}{2} \Rightarrow \text{góc } A \text{ tù.}$$

b) Ta có  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$  (h.2.21)

Do đó  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$= \frac{1}{6} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{21}{2}\right) = -\frac{7}{4}.$$



Hình 2.21

2.18. Ta cần chứng minh  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$  (h.2.22).

Ta có  $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}$  vì  $M$  là trung điểm của đoạn  $HD$ .

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HD}$$

Do đó  $2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HD})$

$$= \underbrace{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH}}_{=0} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} + \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HD}}_{=0}$$

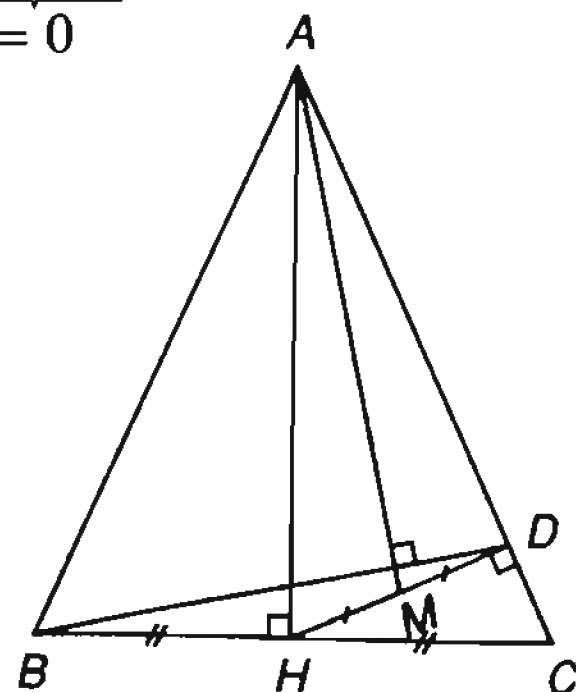
$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH}$$

$$= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}) \cdot \overrightarrow{BH}$$

$$= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \underbrace{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH}}_{=0} + \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{BH}$$

$$= \overrightarrow{HD} \cdot (\underbrace{\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH}}_{\overrightarrow{AC}}) = \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

Vậy  $AM$  vuông góc với  $BD$ .



Hình 2.22

**2.19.** Dựng tam giác  $ABC$  có  $AB = 5$ ,  $BC = 12$  và  $AC = 13$ .

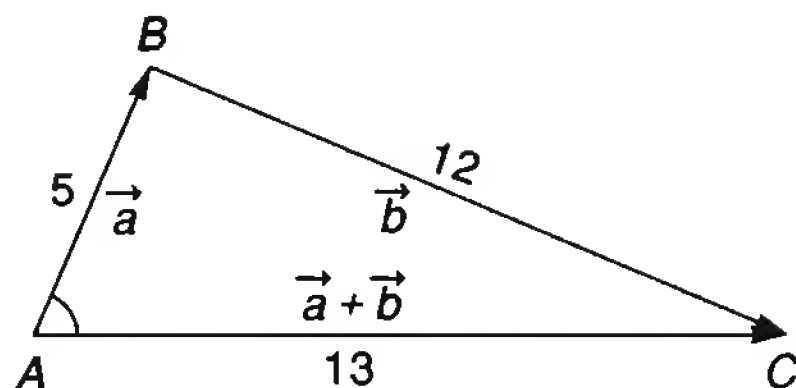
Ta có  $|\vec{a}| = 5$ ,  $|\vec{b}| = 12$ ,  $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$  (h.2.23)

và  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ .

Khi đó  $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

Mặt khác ta có :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}(AC^2 + AB^2 - BC^2) \\ &= \frac{1}{2}(13^2 + 5^2 - 12^2) = 25.\end{aligned}$$



Hình 2.23

Ta suy ra  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{25}{5 \cdot 13} \approx 0,3846$ .

Suy ra  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \approx 67^\circ 23'$ .

**2.20.** Ta có  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$  (h.2.24)

$$\overrightarrow{HM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{HM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HB} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HB}}_{=0} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HC})$$

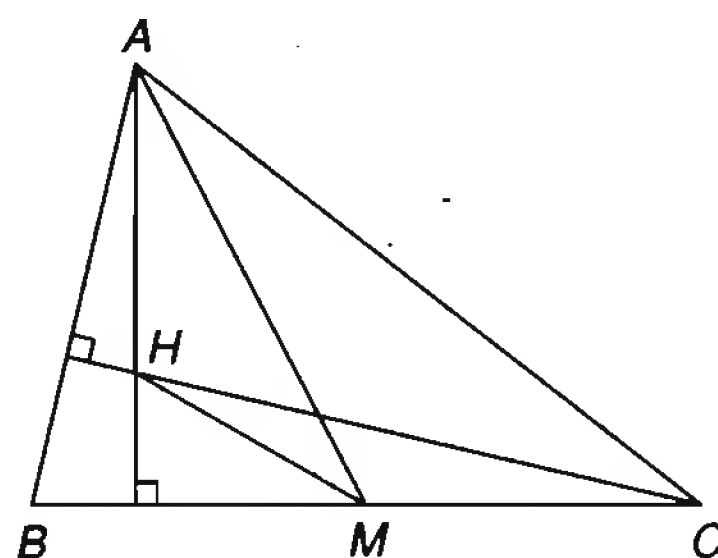
$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HC})$$

$$= \frac{1}{4}[\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC})]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC}}_0 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \underbrace{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HB}}_0 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}\right]$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB})$$

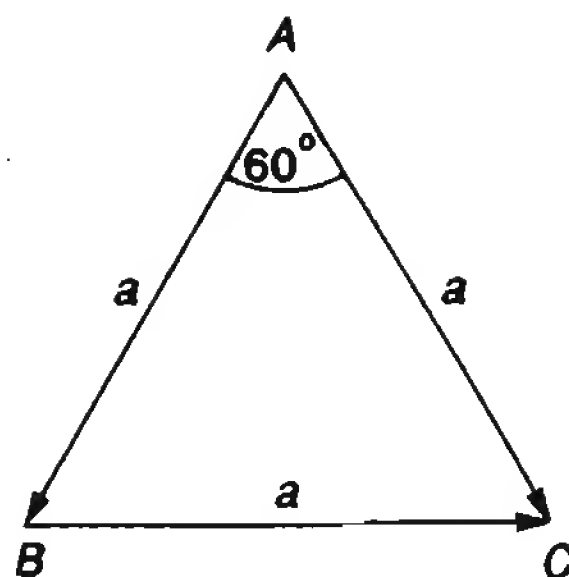
$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}^2 = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2.$$



Hình 2.24

2.21.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} a^2$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} a^2$  (h.2.25).

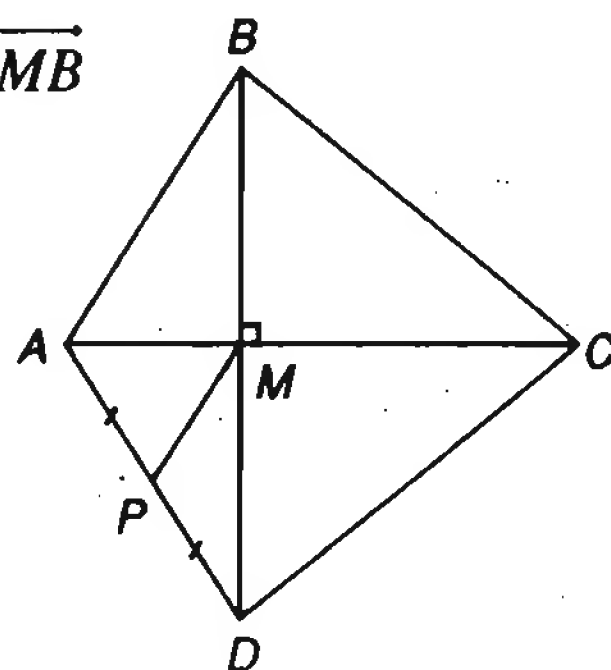


Hình 2.25

2.22. Ta có

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) \cdot (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} - \underbrace{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}_0 + \underbrace{\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC}}_0 - \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB} \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB}. \end{aligned}$$

Do đó  $\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$   
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB}$  (h.2.26).



Hình 2.26

2.23. a) Vì ABCD là hình bình hành nên ta có

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$  trong đó

$\overrightarrow{BA} = (5; 3)$

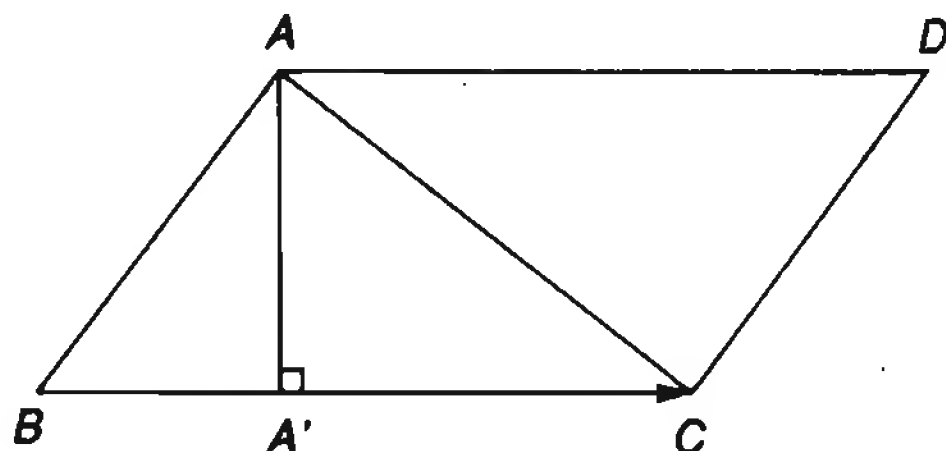
$\overrightarrow{BC} = (6; -2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BD} = (11; 1)$  (h.2.27).

Giả sử D có toạ độ  $(x_D; y_D)$ .

Vì  $\overrightarrow{BD} = (11; 1)$  và  $B(-3; 1)$  nên ta có :

$$\begin{cases} x_D + 3 = 11 \\ y_D - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 8 \\ y_D = 2. \end{cases}$$



Hình 2.27

**Chú ý :** Ta có thể dựa vào biểu thức vectơ  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  hoặc  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$  để tính toạ độ điểm D.

b) Gọi  $A'(x; y)$  là chân đường cao vẽ từ  $A$  ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC} \text{ hay } \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BA'} \text{ cùng phương với } \overrightarrow{BC} \end{cases}$$

với  $\overrightarrow{AA'} = (x-2; y-4)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (6; -2)$ ,  $\overrightarrow{BA'} = (x+3; y-1)$ .

Do đó :

$$\begin{cases} (x-2).6 + (y-4).(-2) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC} \\ -2(x+3) - 6(y-1) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA'} \text{ cùng phương với } \overrightarrow{BC} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 12 - 2y + 8 = 0 \\ -2x - 6 - 6y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y - 4 = 0 \\ -2x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = \frac{3}{5} \\ y_{A'} = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

**2.24.** Ta có  $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (2; -2)$ . Do đó :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2.2 + 2(-2) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}.$$

Mặt khác  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ . Vậy tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ .

**2.25.** Ta có  $\overrightarrow{AB} = (1; 1)$ ,  $\overrightarrow{DC} = (3; 3)$ . Vậy  $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{AB}$ , ta suy ra  $DC \parallel AB$  và  $DC = 3AB$ .

Mặt khác  $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{1^2 + 3^2}$  và  $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + 1^2}$

nên  $ABCD$  là hình thang cân có hai cạnh bên  $AD$  và  $BC$  bằng nhau, còn hai đáy là  $AB$  và  $CD$  trong đó đáy lớn  $CD$  dài gấp 3 lần đáy nhỏ  $AB$ .

**2.26.** a) Ta có  $\overrightarrow{AB} = (4; 2)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (7; 1)$ .

Vì  $\frac{4}{7} \neq \frac{2}{1}$  nên ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.

b) Ta có  $\cos B = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}$  với  $\overrightarrow{BA} = (-4; -2)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (3; -1)$ .

$$\text{Do đó } \cos B = \frac{(-4.3) + (-2)(-1)}{\sqrt{16+4} \cdot \sqrt{9+1}} = \frac{-10}{\sqrt{200}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy  $\hat{B} = 135^\circ$ .

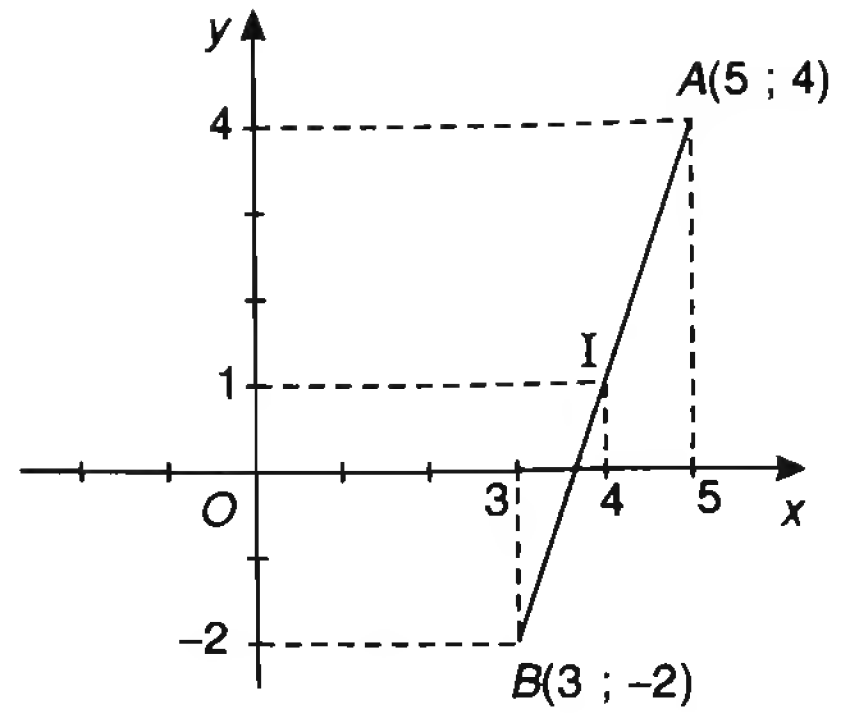
2.27. Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn  $AB$ , ta có  $I(4 ; 1)$  (h.2.28).

Vì  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$  nên  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = 2|\overrightarrow{MI}|$  nhỏ nhất khi giá trị của đoạn  $IM$  nhỏ nhất. Điểm  $M$  chạy trên trục  $Ox$  nên có tọa độ dạng  $M(x ; 0)$ . Do đó :

$$|\overrightarrow{IM}| = \sqrt{(x-4)^2 + 1} \geq 1.$$

Dấu “=” xảy ra khi  $x = 4$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$  là 2 khi  $M$  có tọa độ là  $M(4 ; 0)$ .



Hình 2.28

2.28. Muốn chứng minh tứ giác  $ABCD$  nội tiếp được trong một đường tròn, ta chứng minh tứ giác này có hai góc đối bù nhau. Khi đó hai góc này có cosin đối nhau.

Theo giả thiết ta có :

$$\overrightarrow{AB} = (1 ; -3) ; \overrightarrow{AD} = (-4 ; 2) ; \overrightarrow{CB} = (2 ; 4) ; \overrightarrow{CD} = (-3 ; 9).$$

$$\text{Do đó } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{1 \cdot (-4) + (-3) \cdot 2}{\sqrt{1+9} \cdot \sqrt{16+4}} = \frac{-10}{\sqrt{200}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{2 \cdot (-3) + 4 \cdot 9}{\sqrt{4+16} \cdot \sqrt{9+81}} = \frac{30}{\sqrt{1800}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vì  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = -\cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$  nên hai góc này bù nhau. Vậy tứ giác  $ABCD$  nội tiếp được trong một đường tròn.

### §3. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

**2.29.** a) Theo định lí côsin ta có :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 12 + 4 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4.$$

Vậy  $c = 2$  và tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  có  $b = c = 2$ .

Ta có  $\widehat{C} = 30^\circ$ , vậy  $\widehat{B} = 30^\circ$  và  $\widehat{A} = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$ .

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

b) 
$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1. \text{ Vì tam giác } ABC \text{ cân tại } A \text{ nên } h_a = m_a = 1.$$

**2.30.** Ta có  $c = 6$  là cạnh lớn nhất của tam giác. Do đó  $\widehat{C}$  là góc lớn nhất.

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = -\frac{11}{24} \Rightarrow \widehat{C} \approx 117^\circ 17'.$$

Muốn tính đường cao ứng với cạnh lớn nhất ta dùng công thức Hê-rông để tính diện tích tam giác và từ đó suy ra đường cao tương ứng.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p = \frac{1}{2}(3+4+6) = \frac{13}{2}$$

$$S = \sqrt{\frac{13}{2} \left( \frac{13}{2} - 3 \right) \left( \frac{13}{2} - 4 \right) \left( \frac{13}{2} - 6 \right)} = \frac{\sqrt{455}}{4}.$$

Ta có 
$$h_c = \frac{2S}{c} = \frac{\sqrt{455}}{2 \cdot 6} = \frac{\sqrt{455}}{12}.$$

**2.31.** Ta có 
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8 + 6 + 2 - 2\sqrt{12} - 12}{4\sqrt{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{4 - 4\sqrt{3}}{8\sqrt{3} - 8}$$

$$= \frac{4(1 - \sqrt{3})}{8(\sqrt{3} - 1)} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy  $\widehat{A} = 120^\circ$ .

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2.ca} = \frac{6+2-2\sqrt{12}+12-8}{2.(\sqrt{6}-\sqrt{2}).2\sqrt{3}} = \frac{12-2\sqrt{12}}{4\sqrt{18}-4\sqrt{6}} \\ &= \frac{4(3-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}(3-\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ V\grave{a}y } \hat{B} = 45^\circ.\end{aligned}$$

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{ac \sin B}{a} = c \sin B = (\sqrt{6}-\sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}-1.$$

$$\frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow R = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{2\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2.$$

$$\begin{aligned}S = pr \Rightarrow r &= \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}ac \sin B}{\frac{1}{2}(a+b+c)} = \frac{ac \sin B}{a+b+c} \\ &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\sqrt{6}+\sqrt{3}+1}.\end{aligned}$$

2.32. Ta có  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{36+64-112}{2.6.8} = -\frac{1}{8}$

$$\Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}.$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = 9\sqrt{7} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{18\sqrt{7}}{4\sqrt{7}} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ (cm)}.$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{4\sqrt{7} \cdot 6 \cdot 8}{4 \cdot 9\sqrt{7}} = \frac{16}{3} \text{ (cm)}.$$

2.33. a) 
$$\begin{aligned}m_a^2 &= \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{18^2 + 16^2}{2} - \frac{26^2}{4} \\ &= \frac{324 + 256}{2} - \frac{676}{4} = \frac{484}{4} \Rightarrow m_a = \frac{22}{2} = 11.\end{aligned}$$



$$\text{b) } \begin{cases} m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \\ m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 \\ 4m_b^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2 \\ 4m_c^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2. \end{cases}$$

Ta suy ra :  $4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2).$

**2.34.** a) Theo định lí sin ta có :  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$

Ta suy ra :  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} = \frac{2a}{\sin B + \sin C}$

$\Rightarrow 2\sin A = \sin B + \sin C.$

b) Đối với tam giác  $ABC$  ta có :  $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}h_c \cdot c = \frac{abc}{4R}.$

Ta suy ra  $h_c = \frac{ab}{2R}.$  Tương tự ta có  $h_b = \frac{ac}{2R}, h_a = \frac{bc}{2R}.$  Do đó :

$$\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = 2R \left( \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} \right) = 2R \frac{b+c}{abc} \text{ mà } b+c = 2a$$

nên  $\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{2R \cdot 2a}{abc} = \frac{2R \cdot 2}{bc} = \frac{2}{h_a}.$

Vậy  $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$

**2.35.** a) Theo định lí sin ta có  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$

Do đó :  $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C.$

Thay các giá trị này vào biểu thức  $a = b \cos C + c \cos B$  ta có :

$$2R \sin A = 2R \sin B \cos C + 2R \sin C \cos B.$$

$\Rightarrow \sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B.$

b) Ta có  $h_a = \frac{2S}{a}$ , mà  $2S = \frac{2abc}{4R} = \frac{abc}{2R}$ .

Vậy  $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{bc}{2R}$  hay  $bc = 2R \cdot h_a$ , mà  $b = 2R \sin B$  và  $c = 2R \sin C$  nên :

$$2R \sin B \cdot 2R \sin C = 2R \cdot h_a \Rightarrow h_a = 2R \sin B \sin C.$$

2.36. a) Theo giả thiết ta có  $a^2 = bc$ .

Thay  $a = 2R \sin A$ ,  $b = 2R \sin B$ ,  $c = 2R \sin C$  vào hệ thức trên ta có :

$$4R^2 \sin^2 A = 2R \sin B \cdot 2R \sin C$$

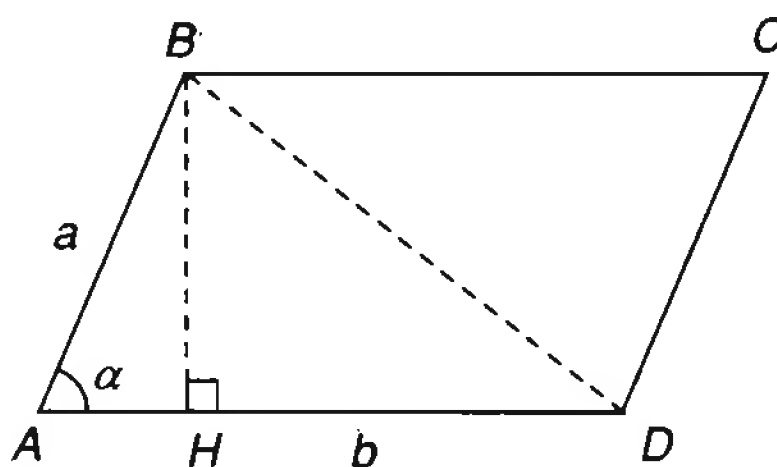
$$\Rightarrow \sin^2 A = \sin B \cdot \sin C.$$

b) Ta có  $2S = ah_a = bh_b = ch_c$ .

$$\text{Do đó : } a^2 h_a^2 = b \cdot c \cdot h_b \cdot h_c.$$

Theo giả thiết :  $a^2 = bc$  nên ta suy ra  $h_a^2 = h_b \cdot h_c$ .

2.37. Xét hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = a$ ,  $AD = b$ .  $\widehat{BAD} = \alpha$  và  $BH$  là đường cao, ta có  $BH \perp AD$  tại  $H$ . (h.2.29).



Hình 2.29

Gọi  $S$  là diện tích hình bình hành  $ABCD$ , ta có  $S = AD \cdot BH$  với  $BH = AB \sin \alpha$ .

$$\text{Vậy } S = AD \cdot AB \sin \alpha = a \cdot b \sin \alpha.$$

Nếu  $\widehat{BAD} = \alpha$  thì  $\widehat{ABC} = 180^\circ - \alpha$ .

Khi đó ta vẫn có  $\sin \widehat{BAD} = \sin \widehat{ABC}$ .

**Nhận xét :** Diện tích hình bình hành  $ABCD$  gấp đôi diện tích tam giác  $ABD$  mà tam giác  $ABD$  có diện tích là  $\frac{1}{2}ab \sin \alpha$ . Do đó ta suy ra diện tích của hình bình hành bằng  $ab \sin \alpha$ .

**2.38.** a) Ta có  $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{CBD}$ .

Vẽ  $AH$  và  $CK$  vuông góc với  $BD$ . (h.2.30).

Gọi  $I$  là giao điểm của hai đường chéo

$AC$  và  $BD$ . Ta có :  $AH = AI \sin \alpha$

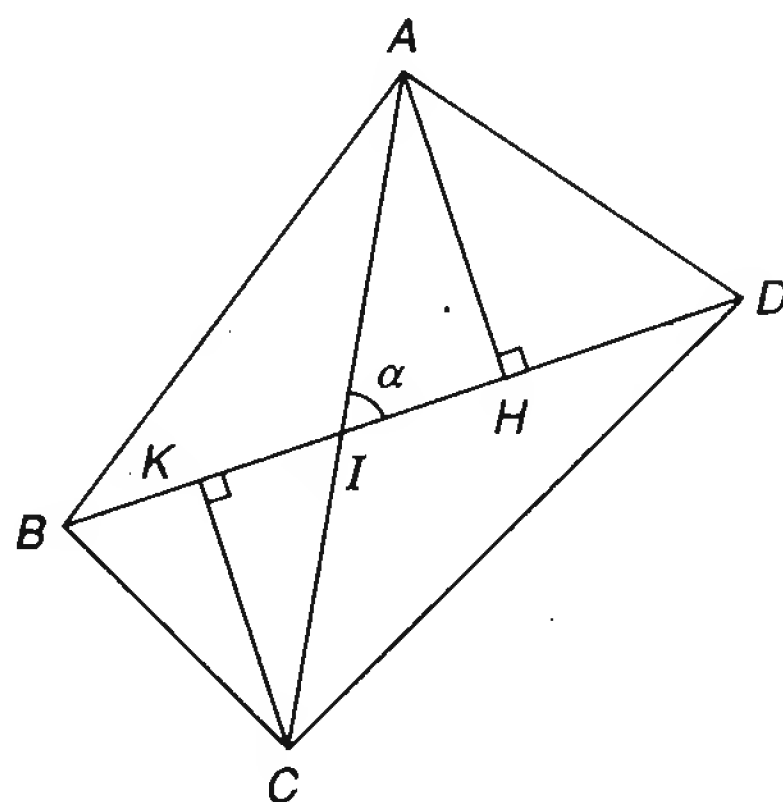
$$CK = CI \sin \alpha$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AH \cdot BD + \frac{1}{2}CK \cdot BD$$

$$= \frac{1}{2}BD (AH + CK)$$

$$= \frac{1}{2}BD \cdot (AI + IC) \sin \alpha = \frac{1}{2}BD \cdot AC \sin \alpha.$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}x \cdot y \sin \alpha.$$



Hình 2.30

b) Nếu  $AC \perp BD$  thì  $\sin \alpha = 1$ , khi đó  $S_{ABCD} = \frac{1}{2}xy$ . Như vậy nếu tứ giác

lồi  $ABCD$  có hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  vuông góc với nhau thì diện tích của tứ giác đó bằng một nửa tích độ dài của hai đường chéo.

**2.39.** Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  của tứ giác  $ABCD$  (h.2.31).

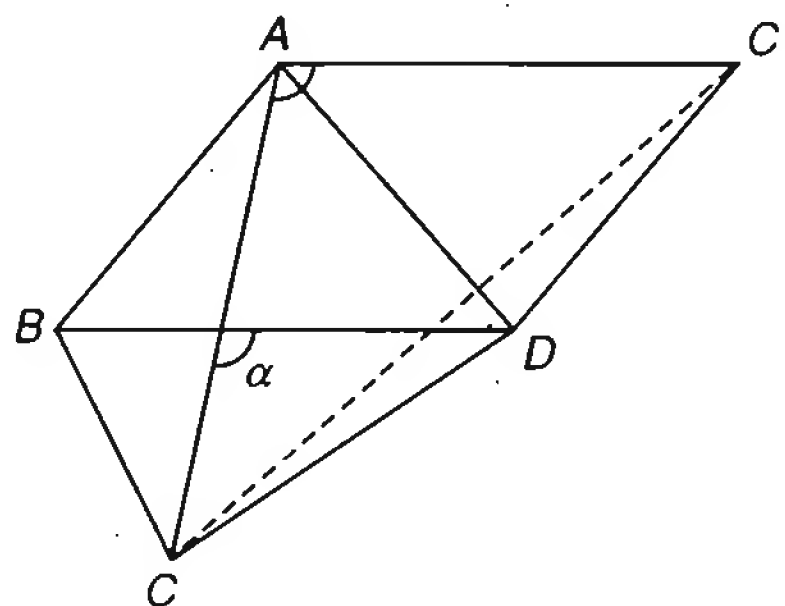
Ta có  $\widehat{CAC'} = \alpha$  vì  $AC' \parallel BD$ .

Theo kết quả bài 2.38 ta có :

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin \alpha.$$

Mặt khác  $S_{ACC'} = \frac{1}{2}AC \cdot AC' \sin \alpha$ ,

mà  $AC' = BD$  nên  $S_{ABCD} = S_{ACC'}$ .



Hình 2.31

2.40. Ta có  $\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 180^\circ - (40^\circ + 120^\circ) = 20^\circ$ .

Theo định lí sin ta có :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{35 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 120^\circ} \approx 26 \text{ (cm)}$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{35 \cdot \sin 20^\circ}{\sin 120^\circ} \approx 14 \text{ (cm)}.$$

2.41. Theo định lí cosin ta có :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 7^2 + 23^2 - 2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot \cos 130^\circ \approx 785$$

$\Rightarrow c \approx 28 \text{ (cm)}$ . Theo định lí sin ta có :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin A = \frac{a \sin C}{c} \approx \frac{7 \cdot \sin 130^\circ}{28} \approx 0,1915,$$

Vậy  $\hat{A} \approx 11^\circ 2'$ .

$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) \approx 180^\circ - (11^\circ 2' + 130^\circ) = 38^\circ 58'.$$

2.42. Theo định lí cosin ta có :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{18^2 + 20^2 - 14^2}{2 \cdot 18 \cdot 20} = \frac{528}{720} \approx 0,7333,$$

Vậy  $\hat{A} \approx 42^\circ 50'$ .

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{14^2 + 20^2 - 18^2}{2 \cdot 14 \cdot 20} = \frac{272}{560} \approx 0,4857,$$

Vậy  $\hat{B} \approx 60^\circ 56'$ .

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 180^\circ - (42^\circ 50' + 60^\circ 56') = 76^\circ 14'.$$

2.43. Muốn tính chiều cao  $CD$  của tháp, trước hết ta hãy tính góc  $\widehat{ADB}$ .

$$\widehat{ADB} = 67^\circ - 43^\circ = 24^\circ.$$

Theo định lí sin đối với tam giác  $ABD$  ta có :

$$\frac{BD}{\sin 43^\circ} = \frac{AB}{\sin 24^\circ} \Rightarrow BD = \frac{30 \cdot \sin 43^\circ}{\sin 24^\circ} \approx 50,30 \text{ (m)}.$$

Trong tam giác vuông  $BCD$  ta có :

$$\sin 67^\circ = \frac{CD}{BD} \Rightarrow CD = BD \cdot \sin 67^\circ \approx 50,30 \cdot \sin 67^\circ$$

hay  $CD \approx 46,30$  (m).

**2.44.** Theo định lí sin đối với tam giác  $ABC$  ta có :

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{5}{\sin A} = \frac{12}{\sin 37^\circ}$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{5 \cdot \sin 37^\circ}{12} \approx 0,2508$$

$$\Rightarrow \hat{A} \approx 14^\circ 31'.$$

$$\hat{B} \approx 180^\circ - (37^\circ + 14^\circ 31') = 128^\circ 29'.$$

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{12}{\sin C} \Rightarrow AC = \frac{12 \cdot \sin B}{\sin C} \approx \frac{12 \cdot \sin 128^\circ 29'}{\sin 37^\circ} \approx 15,61 \text{ (m)}.$$

Vậy khoảng cách  $AC \approx 15,61$  (m).

## CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

**2.45.** Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$  ta có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD}.$$

Mặt khác  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ . Theo giả thiết ta có :

$$|2\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{AD}| \text{ hay } AM = \frac{BC}{2}.$$

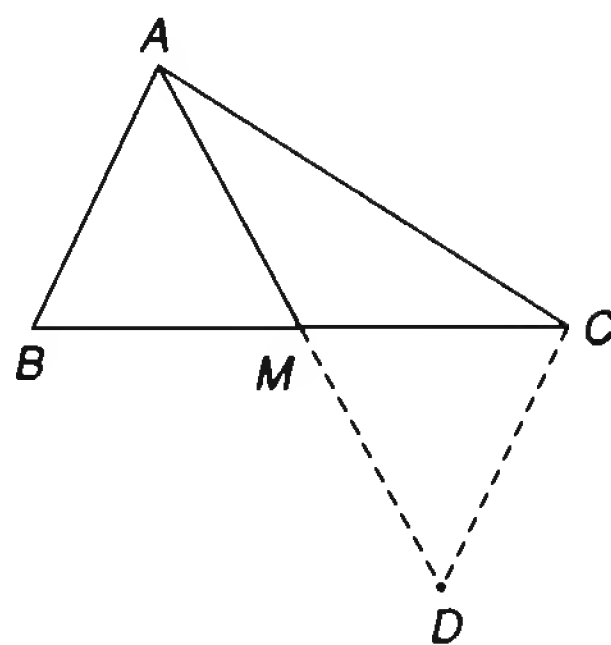
Ta suy ra  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$  (h.2.32).

**2.46.** Theo giả thiết ta có :

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 = 0.$$

Ta suy ra  $ABC$  là tam giác có  $AB = AC$  (tam giác cân tại  $A$ ).



Hình 2.32

2.47. a)  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 49 + 100 - 140 \cos 56^\circ 29'$   
 $\Rightarrow c^2 \approx 71,7$  hay  $c \approx 8,47$  ;  
 b)  $b \approx 4,43$  ;  
 c)  $a \approx 11,63$ .

2.48. Ta có  $\hat{A} = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$ .

Đặt  $AC = b, AB = c$ . Theo định lí sin :

$$\frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sin 75^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ}. \text{ Ta suy ra :}$$

$$AC = b = \frac{a\sqrt{3}}{2 \sin 75^\circ} \approx \frac{a\sqrt{3}}{1,93} \approx 0,897a,$$

$$AB = c = \frac{a\sqrt{2}}{2 \sin 75^\circ} \approx \frac{a\sqrt{2}}{1,93} \approx 0,732a.$$

2.49. Ta có  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 35^2 + 20^2 - 35 \cdot 20 = 925$ .  
 Vậy  $a \approx 30,41$ .

a) Từ công thức  $S = \frac{1}{2}ah_a$  ta có  $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{bc \sin A}{a}$   

$$\Rightarrow h_a = \frac{20 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{30,41} \approx 19,94.$$

b) Từ công thức  $\frac{a}{\sin A} = 2R$  ta có  $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{30,41}{\sqrt{3}} \approx 17,56$ .

c) Từ công thức  $S = pr$  với  $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$  ta có :

$$r = \frac{2S}{a + b + c} = \frac{bc \sin A}{a + b + c} \approx 7,10.$$

2.50. Ta có  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\Rightarrow b^2 - c^2 = c^2 - b^2 + 2a(b \cos C - c \cos B)$$

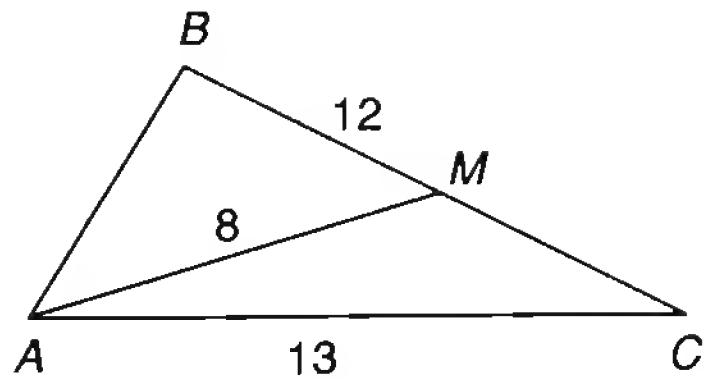
$$\Rightarrow 2(b^2 - c^2) = 2a(b \cos C - c \cos B)$$

hay  $b^2 - c^2 = a(b \cos C - c \cos B).$

2.51. Theo công thức Hê-rông ta có :

$$S_{AMC} = \sqrt{\frac{27}{2} \left( \frac{27}{2} - 13 \right) \left( \frac{27}{2} - 6 \right) \left( \frac{27}{2} - 8 \right)}$$

$$= \frac{9\sqrt{55}}{4} \text{ (h.2.33).}$$



Hình 2.33

$$S_{ABC} = 2S_{AMC} = \frac{9\sqrt{55}}{2}.$$

Mặt khác ta có  $AM^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$  hay  $2AM^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$ .

Do đó  $AB^2 = c^2 = 2AM^2 - b^2 + \frac{a^2}{2} = 2.64 - 169 + 72 = 31$

$$\Rightarrow c = \sqrt{31}.$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{144 + 31 - 169}{24\sqrt{31}} \approx 0,045 \Rightarrow \hat{B} \approx 87^{\circ}25'.$$

2.52. Tam giác ABC có ba cạnh là  $BC = 14, CA = 18, AB = 20$ , ta cần tìm các góc  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ .

Ta có  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{18^2 + 20^2 - 14^2}{2.18.20} \approx 0,7333$

$$\Rightarrow \hat{A} \approx 42^{\circ}50'.$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{14^2 + 20^2 - 18^2}{2.14.20} \approx 0,4857$$

$$\Rightarrow \hat{B} \approx 60^{\circ}56'.$$

$$\hat{C} = 180^{\circ} - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 76^{\circ}14'.$$

2.53. Tam giác ABC có cạnh  $c = AB = 14$  và có  $\hat{A} = 60^{\circ}, \hat{B} = 40^{\circ}$ . Ta có  $\hat{C} = 180^{\circ} - (\hat{A} + \hat{B}) = 80^{\circ}$ , cần tìm  $a$  và  $b$ . Theo định lí sin :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ ta suy ra } a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{7\sqrt{3}}{\sin 80^{\circ}} \approx 12,31$$

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{14 \sin 40^{\circ}}{\sin 80^{\circ}} \approx 9,14.$$

**2.54.** Theo định lí côsin ta có :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = (49,4)^2 + (26,4)^2 - 2 \cdot 49,4 \cdot 26,4 \cdot \cos 47^\circ 20' \\ \approx 1369,5781.$$

Vậy  $c = \sqrt{1369,5781} \approx 37$ .

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx \frac{(26,4)^2 + (37)^2 - (49,4)^2}{2 \cdot 26,4 \cdot 37} \approx -0,1914$$

Ta suy ra  $\hat{A} \approx 101^\circ 2'$ .

$$\hat{B} \approx 180^\circ - (101^\circ 2' + 47^\circ 20') = 31^\circ 38'.$$

### CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

**2.55.** Áp dụng công thức  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  ta tính được  $a = \sqrt{3}$  (cm).  
Chọn (C).

**2.56.** Áp dụng công thức  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$  ta tính được  $\cos A = \frac{3}{10} = 0,3$ .

Vậy  $\hat{A} > 60^\circ$ . Chọn (C).

**2.57.** Ta có  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 25 \Rightarrow m_a = 5$  (cm). Chọn (B).

**2.58.** Dùng công thức  $S = pr$  ta có  $r = \frac{S}{p} = \frac{24}{12} = 2$  (cm). Chọn (C).

**2.59.** Ta có  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{3}}{2}$  (cm). Chọn (C).

**2.60.** Ta có  $S_{ABC} = \frac{1}{2} CH \cdot AB$  với  $CH = \frac{3}{2}R$  và  $AB = R\sqrt{3}$ , mà  $R = 4$  nên  
 $S_{ABC} = 12\sqrt{3}$  (cm<sup>2</sup>). Chọn (C).

**2.61.** Dùng công thức  $S = pr$  với  $p = \frac{a(2 + \sqrt{2})}{2}$  nên  $r = \frac{S}{p} = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}$ . Chọn (C).



2.62.  $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$

$$\Leftrightarrow (a + b)^2 - c^2 = 3ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab - c^2 = 3ab,$$

$$\text{mà } a^2 + b^2 - 2ab \cos C = c^2$$

$$\text{nên } 2ab \cos C = ab \Rightarrow \cos C = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ. \text{ Chọn (D).}$$

2.63. Cắt hình bình hành theo đường chéo  $BD$  rồi ghép cho cạnh  $BC$  trùng với  $AD$ , ta được một hình vuông cạnh  $a$  và có  $S = a^2$ . Chọn (C).

2.64.  $BM^2 = \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} = \frac{a^2 + 2a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

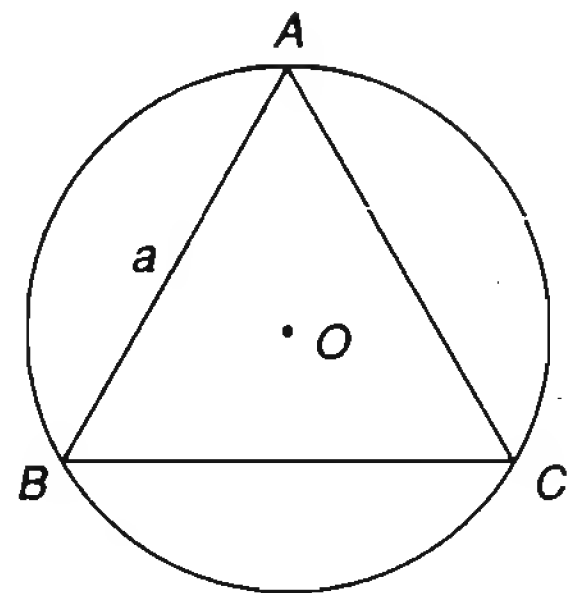
$$\Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{5}}{2}. \text{ Chọn (D).}$$

2.65. Tam giác đều cạnh  $a$  có đường cao  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

$$\text{Mặt khác } h = \frac{3}{2}R \text{ (h.2.34)}$$

$$\text{Do đó : } \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}R \Leftrightarrow a\sqrt{3} = 3R.$$

$$\text{Vậy } R = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \text{ Chọn (C).}$$

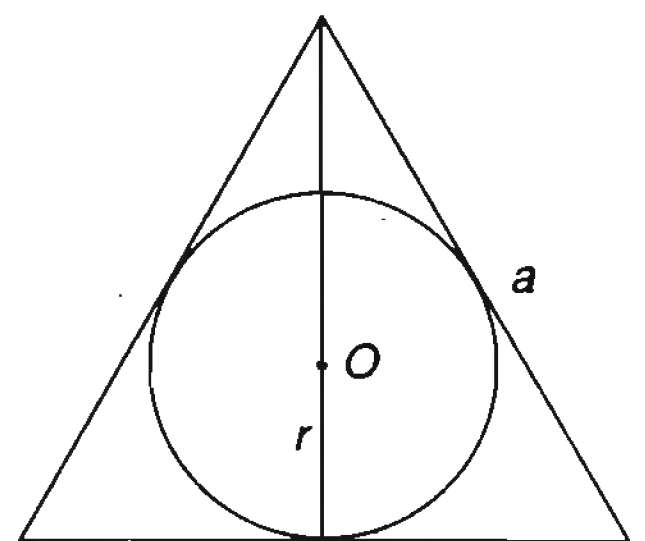


Hình 2.34

2.66. Gọi  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh  $a$  (h.2.35). Ta có :

$$\left. \begin{array}{l} 3r = h \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} = h \end{array} \right\} \Rightarrow 3r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{hay } r = \frac{a\sqrt{3}}{6}. \text{ Chọn (C).}$$



Hình 2.35

2.67. Ta có  $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ ,

$S$  đạt cực đại khi  $\sin C = 1$  nghĩa là  $\widehat{C} = 90^\circ$ . Chọn (B).

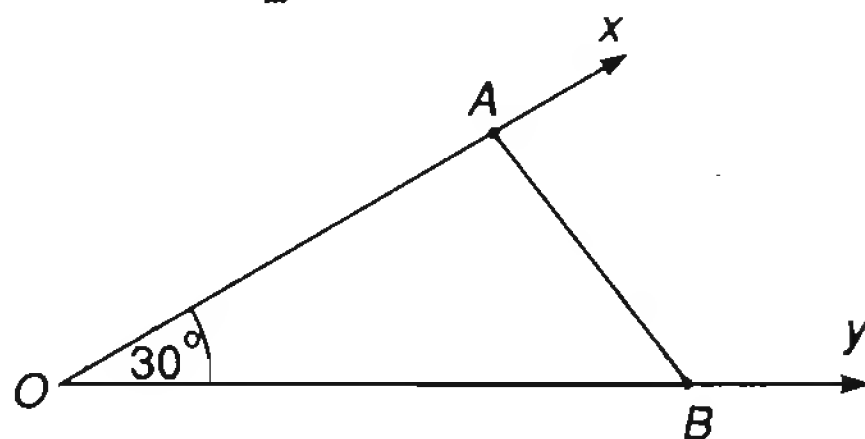
2.68. Gọi  $S'$  là diện tích của tam giác mới, ta có :

$$S' = \frac{1}{2} . 2a . 2b \sin C = 2ab \sin C.$$

Vậy  $S' = 4S$ . Chọn (C).

2.69. Ta có  $\frac{OB}{\sin A} = \frac{AB}{\sin 30^\circ}$  (h.2.36)

$$\Rightarrow OB = \frac{AB \sin A}{\sin 30^\circ} = \frac{2 \sin A}{\frac{1}{2}} = 4 \sin A.$$



Hình 2.36

$OB$  đạt cực đại khi  $\sin A = 1$  nghĩa là  $\widehat{A} = 90^\circ$ , khi đó  $OB = 4$ . Chọn (C).

2.70. Ta có  $\overrightarrow{AB} = (3 ; -1)$ . Do đó  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ . Chọn (D).

2.71. Ta có  $\overrightarrow{AB} = (3 ; 3)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (4 ; -4)$

$$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{BC} = 0. \text{ Vậy tam giác } ABC \text{ vuông tại } B.$$

Hay ta có  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}.$$

Vậy  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ .

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$  có cạnh huyền là  $AC$ .

Chọn (B).

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

§1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình tham số (h.3.1)

- Phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (u_1; u_2)$  là

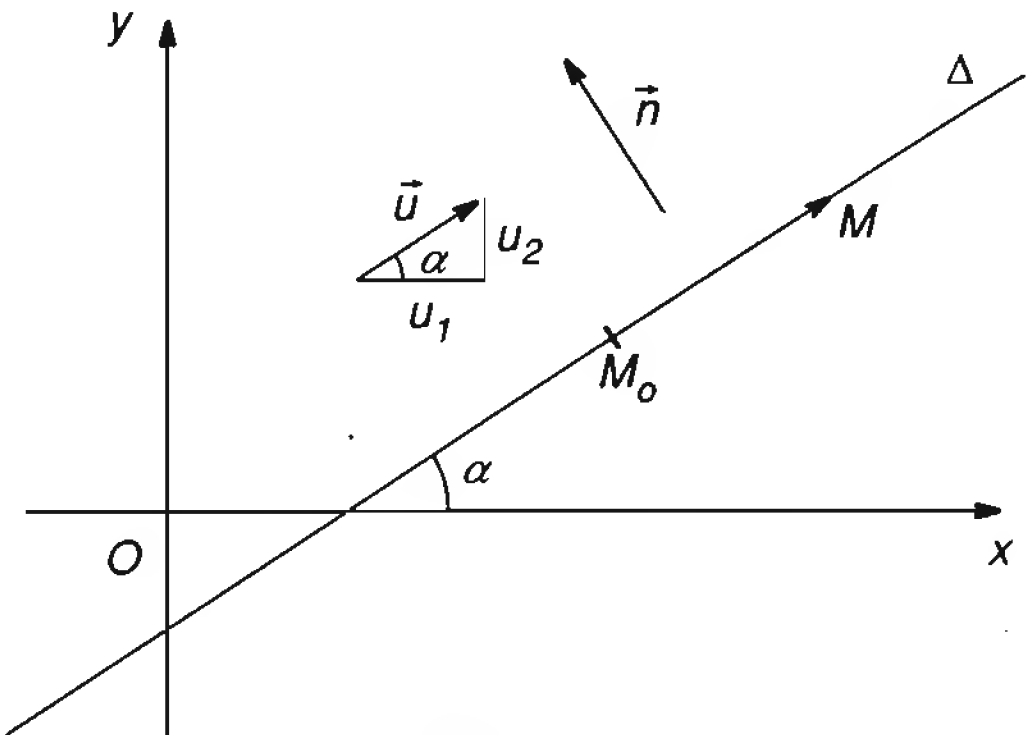
$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$$

$(u_1^2 + u_2^2 \neq 0)$  (h.3.1).

- Phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0)$  và có hệ số góc  $k$  là :  $y - y_0 = k(x - x_0)$ .

- Nếu  $\Delta$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (u_1; u_2)$  với  $u_1 \neq 0$  thì hệ số góc của  $\Delta$  là  $k = \frac{u_2}{u_1}$ .

Nếu  $\Delta$  có hệ số góc là  $k$  thì  $\Delta$  có vectơ chỉ phương là :  $\vec{u} = (1; k)$ .



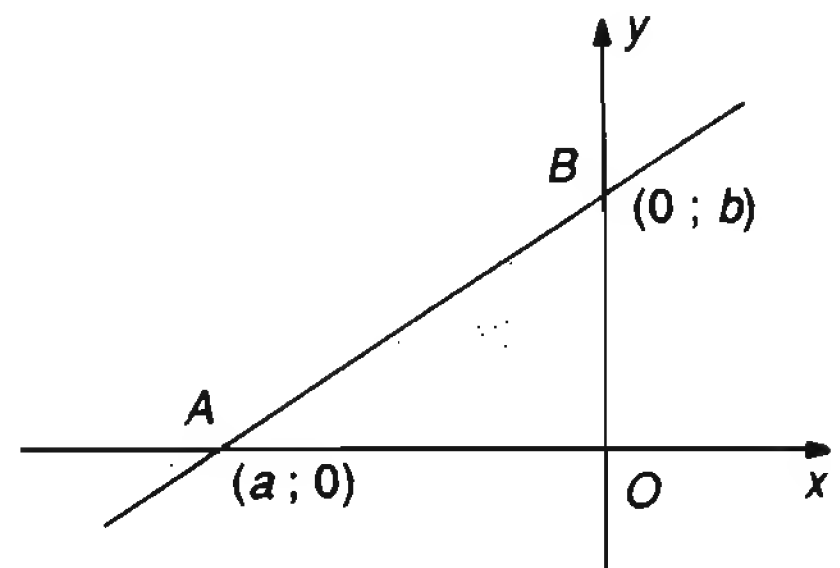
Hình 3.1

## 2. Phương trình tổng quát

• Phương trình của đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M_0(x_0; y_0)$  và có vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = (a; b)$  là :  $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$  ( $a^2 + b^2 \neq 0$ ).

• Phương trình  $ax + by + c = 0$  với  $a^2 + b^2 \neq 0$  gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng nhận  $\vec{n} = (a; b)$  làm vectơ pháp tuyến.

• Đường thẳng  $\Delta$  cắt  $Ox$  và  $Oy$  lần lượt tại  $A(a; 0)$  và  $B(0; b)$  có phương trình theo đoạn chắn là  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  ( $a, b \neq 0$ ) (h.3.2).



Hình 3.2

## 3. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng  $\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$$\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  ta xét số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases} \quad (I)$$

- Hệ (I) có một nghiệm :  $\Delta_1$  cắt  $\Delta_2$ .
- Hệ (I) vô nghiệm :  $\Delta_1 // \Delta_2$ .
- Hệ (I) có vô số nghiệm :  $\Delta_1 \equiv \Delta_2$ .

👉 **Chú ý :** Nếu  $a_2b_2c_2 \neq 0$  thì : -  $\Delta_1$  cắt  $\Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$  ;

$$- \Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} ;$$

$$- \Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

#### 4. Góc giữa hai đường thẳng

Góc giữa hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  có phương trình cho ở mục 3, có vectơ pháp tuyến  $\vec{n}_1$  và  $\vec{n}_2$  được tính bởi công thức :

$$\cos(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

#### 5. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Khoảng cách từ điểm  $M_0(x_0; y_0)$  đến đường thẳng  $\Delta$  có phương trình :

$$ax + by + c = 0 \text{ được cho bởi công thức } d(M_0, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

### B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN



#### VẤN ĐỀ 1

Viết phương trình tham số của đường thẳng

##### 1. Phương pháp

Để viết phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$  ta thực hiện các bước :

– Tìm vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (u_1; u_2)$  của đường thẳng  $\Delta$  ;

– Tìm một điểm  $M_0(x_0; y_0)$  thuộc  $\Delta$  ;

– Phương trình tham số của  $\Delta$  là : 
$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2. \end{cases}$$

##### Chú ý

– Nếu  $\Delta$  có hệ số góc  $k$  thì  $\Delta$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (1; k)$ .

– Nếu  $\Delta$  có vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = (a; b)$  thì  $\Delta$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (-b; a)$  hoặc  $\vec{u} = (b; -a)$ .

## 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Lập phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$  trong mỗi trường hợp sau :

a)  $\Delta$  đi qua điểm  $M(2 ; 1)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (3 ; 4)$  ;

b)  $\Delta$  đi qua điểm  $M(5 ; -2)$  và có vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = (4 ; -3)$ .

*GIẢI*

a) Phương trình tham số của  $\Delta$  là : 
$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t. \end{cases}$$

b)  $\Delta$  có vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = (4 ; -3)$  nên có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (3 ; 4)$ .

Phương trình tham số của  $\Delta$  là : 
$$\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -2 + 4t. \end{cases}$$



**Ví dụ 2.** Viết phương trình tham số của đường thẳng  $\Delta$  trong mỗi trường hợp sau :

a)  $\Delta$  đi qua điểm  $M(5 ; 1)$  và có hệ số góc  $k = 3$  ;

b)  $\Delta$  đi qua hai điểm  $A(3 ; 4)$  và  $B(4 ; 2)$ .

*GIẢI*

a)  $\Delta$  có hệ số góc  $k = 3$  nên  $\Delta$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (1 ; 3)$ .

Phương trình tham số của  $\Delta$  là 
$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 + 3t. \end{cases}$$

b)  $\Delta$  đi qua  $A$  và  $B$  nên  $\Delta$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1 ; -2)$ .

Phương trình tham số của  $\Delta$  là 
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 - 2t. \end{cases}$$



## VẤN ĐỀ 2

Viết phương trình tổng quát của đường thẳng

## 1. Phương pháp


Để viết phương trình tổng quát của đường thẳng  $\Delta$  ta thực hiện các bước :

- Tìm một vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = (a ; b)$  của  $\Delta$  ;
- Tìm một điểm  $M_0(x_0 ; y_0)$  thuộc  $\Delta$  ;
- Viết phương trình  $\Delta$  theo công thức :  $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$  ;
- Biến đổi về dạng :  $ax + by + c = 0$ .

## Chú ý

- Nếu đường thẳng  $\Delta$  cùng phương với đường thẳng  $d : ax + by + c = 0$  thì  $\Delta$  có phương trình tổng quát :  $ax + by + c' = 0$ .
- Nếu đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với đường thẳng  $d : ax + by + c = 0$  thì  $\Delta$  có phương trình tổng quát :  $-bx + ay + c'' = 0$ .

## 2. Các ví dụ

 **Ví dụ 1.** Lập phương trình tổng quát của đường thẳng  $d$  trong mỗi trường hợp sau :

- $d$  đi qua điểm  $M(3 ; 4)$  và có vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = (1 ; 2)$  ;
- $d$  đi qua điểm  $M(3 ; -2)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (4 ; 3)$ .

*GIẢI*


a) Phương trình tổng quát của đường thẳng  $d$  có dạng

$$1(x - 3) + 2(y - 4) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 11 = 0.$$

b) Đường thẳng  $d$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (4 ; 3)$  nên có vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (3 ; -4)$ .

Vậy phương trình tổng quát của  $d$  có dạng :

$$3(x - 3) - 4(y + 2) = 0 \quad \text{hay} \quad 3x - 4y - 17 = 0.$$

 **Ví dụ 2.** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $A(1 ; 4)$ ,  $B(3 ; -1)$ ,  $C(6 ; 2)$ . Lập phương trình tổng quát của các đường thẳng chứa đường cao  $AH$  và trung tuyến  $AM$  của tam giác.

*GIẢI*

$AH$  có vectơ pháp tuyến là  $\overrightarrow{BC} = (3 ; 3)$  hoặc  $\vec{n} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} = (1 ; 1)$ .

Phương trình tổng quát của đường thẳng chứa  $AH$  là :

$$1(x - 1) + 1(y - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y - 5 = 0.$$

Ta tính được toạ độ trung điểm  $M$  của  $BC$  như sau :


$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3 + 6}{2} = \frac{9}{2}$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ta có  $\overrightarrow{AM} = \left( \frac{7}{2}; -\frac{7}{2} \right).$

Trung tuyến  $AM$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = \frac{2}{7} \overrightarrow{AM} = (1; -1)$  nên có vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = (1; 1)$ . Vậy phương trình tổng quát của đường thẳng chứa  $AM$  là :

$$(x - 1) + (y - 4) = 0 \Leftrightarrow x + y - 5 = 0.$$

 **Chú ý.** Tam giác  $ABC$  có đường cao  $AH$  trùng với trung tuyến  $AM$  nên tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ .



### **VẤN ĐỀ 3**

Vị trí tương đối của hai đường thẳng

#### **1. Phương pháp**

- Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

ta xét số nghiệm của hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases} \quad (*)$$



Cụ thể :

Hệ (\*) có nghiệm duy nhất :  $\Delta_1$  cắt  $\Delta_2$ .

Hệ (\*) vô nghiệm :  $\Delta_1 // \Delta_2$ .

Hệ (\*) có vô số nghiệm :  $\Delta_1 \equiv \Delta_2$ .

• Góc giữa hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  được tính bởi công thức :

$$\cos(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

## 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau :

a)  $d_1 : 4x - 10y + 1 = 0$       và       $d_2 : x + y + 2 = 0$  ;

b)  $d_3 : 12x - 6y + 10 = 0$       và       $d_4 : 2x - y + 5 = 0$  ;

c)  $d_5 : 8x + 10y - 12 = 0$       và       $d_6 : \begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 6 - 4t. \end{cases}$

*GIẢI*

a) Ta có  $\frac{4}{1} \neq \frac{-10}{1}$ . Vậy  $d_1$  cắt  $d_2$ .

b) Ta có  $\frac{12}{2} = \frac{-6}{-1} \neq \frac{10}{5}$ . Vậy  $d_3 // d_4$ .

c) Phương trình tổng quát của  $d_6$  là :  $4x + 5y - 6 = 0$ .

Ta có :  $\frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{-6}{-12}$ . Vậy  $d_5 \equiv d_6$ .



**Ví dụ 2.** Cho hai đường thẳng  $d_1 : x - 2y + 5 = 0$  và  $d_2 : 3x - y = 0$ .

a) Tìm giao điểm của  $d_1$  và  $d_2$  ;

b) Tính góc giữa  $d_1$  và  $d_2$ .

### GIẢI

a) Giao điểm của  $d_1$  và  $d_2$  là điểm có toạ độ là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3. \end{cases}$$

Vậy  $d_1$  cắt  $d_2$  tại điểm  $(1 ; 3)$ .

$$\text{b) } \cos(\widehat{d_1, d_2}) = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \frac{|3 + 2|}{\sqrt{1 + 4} \cdot \sqrt{9 + 1}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy  $(\widehat{d_1, d_2}) = 45^\circ$ .



### VẤN ĐỀ 4

Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

#### 1. Phương pháp

• Để tính khoảng cách từ điểm  $M_0(x_0 ; y_0)$  đến đường thẳng  $\Delta : ax + by + c = 0$  ta dùng công thức

$$d(M_0, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

• Nếu đường thẳng  $\Delta : ax + by + c = 0$  chia mặt phẳng  $Oxy$  thành hai nửa mặt phẳng có bờ là  $\Delta$ , ta luôn có :

– Một nửa mặt phẳng chứa các điểm  $M_1(x_1 ; y_1)$  thoả mãn

$$\Delta(M_1) = ax_1 + by_1 + c > 0 ;$$

– Nửa mặt phẳng còn lại chứa các điểm  $M_2(x_2 ; y_2)$  thoả mãn

$$\Delta(M_2) = ax_2 + by_2 + c < 0.$$

• Cho hai đường thẳng cắt nhau  $\Delta_1, \Delta_2$  có phương trình :

$$\Delta_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

$$\Delta_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0.$$

Gọi  $d$  và  $d'$  là hai đường thẳng chứa đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ .

Ta có :  $M(x, y) \in d \cup d'$

$$\Leftrightarrow d(M, \Delta_1) = d(M, \Delta_2) \Leftrightarrow \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Vậy phương trình của hai đường phân giác của các góc hợp bởi  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  là :

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

## 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Tính khoảng cách từ điểm đến đường thẳng được cho tương ứng như sau :

a)  $A(3 ; 5)$  và  $\Delta : 4x + 3y + 1 = 0$  ;

b)  $B(1 ; 2)$  và  $\Delta' : 3x - 4y + 1 = 0$ .

*GIẢI*

a) Ta có  $d(A, \Delta) = \frac{|4.3 + 3.5 + 1|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{28}{5}.$

b)  $d(B, \Delta') = \frac{|3.1 - 4.2 + 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{4}{5}.$



**Ví dụ 2.** Cho đường thẳng  $\Delta : x - y + 2 = 0$  và hai điểm  $O(0 ; 0)$ ,  $A(2 ; 0)$ .

a) Chứng tỏ rằng hai điểm  $A$  và  $O$  nằm về cùng một phía đối với đường thẳng  $\Delta$ .

b) Tìm điểm  $O'$  đối xứng của  $O$  qua  $\Delta$ .

c) Tìm điểm  $M$  trên  $\Delta$  sao cho độ dài của đoạn gấp khúc  $OMA$  ngắn nhất.

*GIẢI*

a) Ta có  $\Delta(A) = 2 - 0 + 2 = 4 > 0$

$$\Delta(O) = 0 - 0 + 2 = 2 > 0.$$

Vậy  $A$  và  $O$  nằm về cùng một phía đối với đường thẳng  $\Delta$ .

b) Gọi  $d$  là đường thẳng đi qua  $O$  và vuông góc với  $\Delta$  tại  $H$ . Phương trình tham số của  $d$  là 
$$\begin{cases} x = t \\ y = -t. \end{cases}$$

Vì  $H \in d$  nên toạ độ của  $H$  có dạng  $(x_H; -x_H)$ .

Mặt khác :  $H \in \Delta \Rightarrow x_H - (-x_H) + 2 = 0 \Rightarrow x_H = -1$ .

Vậy  $H$  có toạ độ là  $(-1; 1)$ .

Vì  $H$  là trung điểm của  $OO'$  nên  $x_{O'} = 2x_H = -2$

$$y_{O'} = 2y_H = 2.$$

Vậy  $O'$  có toạ độ là  $(-2; 2)$ .

c) Ta có  $OM + MA = O'M + MA$ .

Độ dài của đoạn gấp khúc  $OMA$  ngắn nhất  $\Leftrightarrow O', M, A$  thẳng hàng  
 $\Leftrightarrow O'A$  cắt  $\Delta$  tại  $M$ .

Phương trình đường thẳng  $O'A$  là :  $x + 2y - 2 = 0$ .

Toạ độ của  $M(x; y)$  là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Vậy điểm  $M\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$  thoả mãn yêu cầu đề bài.

## C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

**3.1.** Lập phương trình tham số của đường thẳng  $d$  trong mỗi trường hợp sau :

a)  $d$  đi qua điểm  $A(-5; -2)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (4; -3)$  ;

b)  $d$  đi qua hai điểm  $A(\sqrt{3}; 1)$  và  $B(2 + \sqrt{3}; 4)$ .

- 3.2. Cho đường thẳng  $\Delta$  có phương trình tham số  $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t. \end{cases}$
- Tìm điểm  $M$  nằm trên  $\Delta$  và cách điểm  $A(0 ; 1)$  một khoảng bằng 5.
  - Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng  $\Delta$  với đường thẳng  $x + y + 1 = 0$ .
  - Tìm điểm  $M$  trên  $\Delta$  sao cho  $AM$  ngắn nhất.
- 3.3. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng  $\Delta$  trong mỗi trường hợp sau :
- $\Delta$  đi qua điểm  $M(1 ; 1)$  và có vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = (3 ; -2)$  ;
  - $\Delta$  đi qua điểm  $A(2 ; -1)$  và có hệ số góc  $k = -\frac{1}{2}$  ;
  - $\Delta$  đi qua hai điểm  $A(2 ; 0)$  và  $B(0 ; -3)$ .
- 3.4. Lập phương trình ba đường trung trực của một tam giác có trung điểm các cạnh lần lượt là  $M(-1 ; 0)$ ,  $N(4 ; 1)$ ,  $P(2 ; 4)$ .
- 3.5. Cho điểm  $M(1 ; 2)$ . Hãy lập phương trình của đường thẳng qua  $M$  và chắn trên hai trục tọa độ hai đoạn có độ dài bằng nhau.
- 3.6. Cho tam giác  $ABC$ , biết phương trình đường thẳng  $AB : x - 3y + 11 = 0$ , đường cao  $AH : 3x + 7y - 15 = 0$ , đường cao  $BH : 3x - 5y + 13 = 0$ . Tìm phương trình hai đường thẳng chứa hai cạnh còn lại của tam giác.
- 3.7. Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-2 ; 3)$  và hai đường trung tuyến :  $2x - y + 1 = 0$  và  $x + y - 4 = 0$ . Hãy viết phương trình ba đường thẳng chứa ba cạnh của tam giác.
- 3.8. Với giá trị nào của tham số  $m$  thì hai đường thẳng sau đây vuông góc :  
 $\Delta_1 : mx + y + q = 0$  và  $\Delta_2 : x - y + m = 0$  ?
- 3.9. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây :
- $d : \begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$  và  $d' : \begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$  ;
  - $d : \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$  và  $d' : 2x + 4y - 10 = 0$  ;
  - $d : x + y - 2 = 0$  và  $d' : 2x + y - 3 = 0$ .

**3.10.** Tìm góc giữa hai đường thẳng :

$$d_1 : x + 2y + 4 = 0 \quad \text{và} \quad d_2 : 2x - y + 6 = 0.$$

**3.11.** Tính bán kính của đường tròn có tâm là điểm  $I(1 ; 5)$  và tiếp xúc với đường thẳng  $\Delta : 4x - 3y + 1 = 0$ .

**3.12.** Lập phương trình các đường phân giác của các góc giữa hai đường thẳng  $\Delta_1 : 2x + 4y + 7 = 0$  và  $\Delta_2 : x - 2y - 3 = 0$ .

**3.13.** Tìm phương trình của tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng :

$$\Delta_1 : 5x + 3y - 3 = 0 \quad \text{và} \quad \Delta_2 : 5x + 3y + 7 = 0.$$

**3.14.** Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm  $M(2 ; 5)$  và cách đều hai điểm  $A(-1 ; 2)$  và  $B(5 ; 4)$ .

## §2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

### A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Phương trình đường tròn (h.3.3)

• Phương trình đường tròn tâm  $I(a ; b)$ , bán kính  $R$  là :

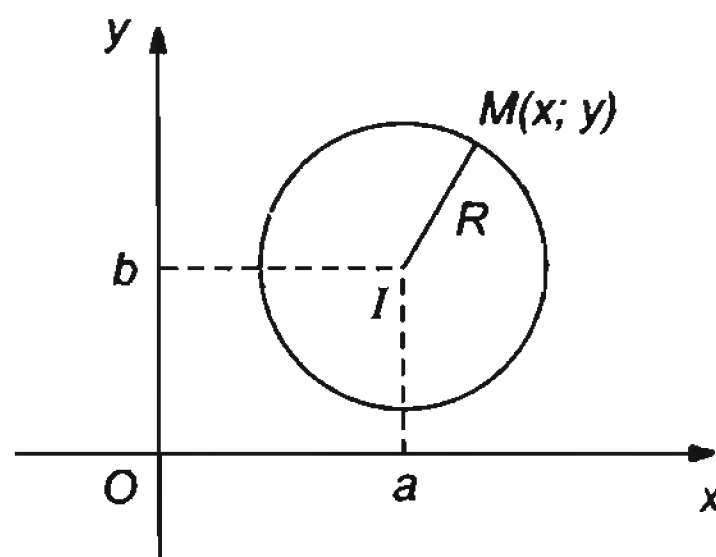
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

• Nếu  $a^2 + b^2 - c > 0$  thì phương trình  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  là phương trình của đường tròn tâm

$I(a ; b)$ , bán kính  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ .

• Nếu  $a^2 + b^2 - c = 0$  thì chỉ có một điểm  $I(a ; b)$  thoả mãn phương trình  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ .

• Nếu  $a^2 + b^2 - c < 0$  thì không có điểm  $M(x ; y)$  nào thoả mãn phương trình  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ .



Hình 3.3

## 2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Tiếp tuyến tại điểm  $M_0(x_0; y_0)$  của đường tròn tâm  $I(a; b)$  có phương trình :

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0.$$

## B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN



### VẤN ĐỀ 1

Nhận dạng một phương trình bậc hai là phương trình đường tròn. Tìm tâm và bán kính đường tròn

#### 1. Phương pháp

Cách 1 : – Đưa phương trình về dạng :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0. \quad (1)$$

– Xét dấu biểu thức  $m = a^2 + b^2 - c$ .

– Nếu  $m > 0$  thì (1) là phương trình đường tròn tâm  $I(a; b)$ , bán kính  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ .

Cách 2 : – Đưa phương trình về dạng

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = m. \quad (2)$$

– Nếu  $m > 0$  thì (2) là phương trình đường tròn tâm  $I(a; b)$ , bán kính  $R = \sqrt{m}$ .

#### 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn đường tròn ? Tìm tâm và bán kính nếu có :

a)  $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 100 = 0$  (1)

b)  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$  (2)

c)  $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 2 = 0.$  (3)

**GIẢI**

a) (1) có dạng  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ , với  $a = 3, b = -4, c = 100$ .

Ta có  $a^2 + b^2 - c = 9 + 16 - 100 < 0$ .

Vậy (1) không phải là phương trình của đường tròn.

b) (2) có dạng  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ , với  $a = -2, b = 3, c = -12$ .

Ta có  $a^2 + b^2 - c = 4 + 9 + 12 = 25 > 0$ .

Vậy (2) là phương trình của đường tròn tâm là điểm  $(-2 ; 3)$ , bán kính bằng

$$\sqrt{a^2 + b^2 - c} = 5.$$

c) Ta có : (3)  $\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 6$   
 $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = (\sqrt{6})^2$

Vậy (3) là phương trình của đường tròn tâm là điểm  $(1 ; -2)$ , bán kính bằng  $\sqrt{6}$ .



**Ví dụ 2.** Cho phương trình  $x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 6m - 1 = 0$ . (1)

a) Với giá trị nào của  $m$  thì (1) là phương trình của đường tròn ?

b) Nếu (1) là phương trình của đường tròn hãy tìm tọa độ tâm và tính bán kính đường tròn đó theo  $m$ .

**GIẢI**

a) (1) có dạng  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  với  $a = m, b = -2m, c = 6m - 1$ .

(1) là phương trình của đường tròn khi và chỉ khi  $a^2 + b^2 - c > 0$ , mà

$$a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m^2 - 6m + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 6m + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{5} \\ m > 1. \end{cases}$$

b) Khi  $m < \frac{1}{5} \vee m > 1$  thì (1) là phương trình của đường tròn tâm  $I(m ; -2m)$

và có bán kính  $R = \sqrt{5m^2 - 6m + 1}$ .





## VẤN ĐỀ 2

Lập phương trình của đường tròn

### 1. Phương pháp

Cách 1 :

- Tìm tọa độ tâm  $I(a ; b)$  của đường tròn  $(\mathcal{C})$  ;
- Tìm bán kính  $R$  của  $(\mathcal{C})$  ;
- Viết phương trình  $(\mathcal{C})$  theo dạng  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ . (1)

### Chú ý

- $(\mathcal{C})$  đi qua  $A, B \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 = R^2$ .
- $(\mathcal{C})$  đi qua  $A$  và tiếp xúc với đường thẳng  $\Delta$  tại  $A \Leftrightarrow IA = d(I, \Delta)$ .
- $(\mathcal{C})$  tiếp xúc với hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2 \Leftrightarrow d(I, \Delta_1) = d(I, \Delta_2) = R$ .

Cách 2 :

- Gọi phương trình của đường tròn  $(\mathcal{C})$  là  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  (2)
- Từ điều kiện của đề bài đưa đến hệ phương trình với ẩn số là  $a, b, c$ .
- Giải hệ phương trình tìm  $a, b, c$  thế vào (2) ta được phương trình đường tròn  $(\mathcal{C})$ .

### 2. Các ví dụ

 **Ví dụ 1.** Lập phương trình của đường tròn  $(\mathcal{C})$  trong các trường hợp sau :

- $(\mathcal{C})$  có tâm  $I(-1 ; 2)$  và tiếp xúc với đường thẳng  $\Delta : x - 2y + 7 = 0$  ;
- $(\mathcal{C})$  có đường kính là  $AB$  với  $A(1 ; 1), B(7 ; 5)$ .

GIẢI

$$\text{a) Ta có } R = d(I, \Delta) = \frac{|-1 - 4 + 7|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vậy phương trình của } (\mathcal{C}) \text{ là : } (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{4}{5}.$$

b) Tâm  $I$  của  $(\mathcal{C})$  là trung điểm của  $AB$ .

$$\text{Ta có : } x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+7}{2} = 4$$

$$y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+5}{2} = 3.$$

$$\text{Do đó : } IA = \sqrt{(1-4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{13}.$$

Vậy phương trình của  $(\mathcal{C})$  là :  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 13$ .



**Ví dụ 2.** Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm  $A(1 ; 2)$ ,  $B(5 ; 2)$ ,  $C(1 ; -3)$ .

*GIẢI*

Xét đường tròn  $(\mathcal{C})$  có dạng  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ .

$(\mathcal{C})$  đi qua  $A, B, C$  khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 1+4-2a-4b+c=0 \\ 25+4-10a-4b+c=0 \\ 1+9-2a+6b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+4b-c=5 \\ 10a+4b-c=29 \\ 2a-6b-c=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=-1. \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn đi qua ba điểm  $A, B, C$  là :

$$x^2 + y^2 - 6x + y - 1 = 0.$$



### **VẤN ĐỀ 3**

Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn

#### **1. Phương pháp**

*Loại 1.* Lập phương trình tiếp tuyến tại điểm  $M_0(x_0 ; y_0)$  thuộc đường tròn  $(\mathcal{C})$ .

– Tìm toạ độ tâm  $I(a ; b)$  của  $(\mathcal{C})$ .

– Phương trình tiếp tuyến với  $(\mathcal{C})$  tại  $M_0(x_0 ; y_0)$  có dạng :

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0.$$

**Loại 2.** Lập phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  với  $(\mathcal{C})$  khi chưa biết tiếp điểm :

Dùng điều kiện tiếp xúc để xác định  $\Delta$  :

$\Delta$  tiếp xúc với đường tròn  $(\mathcal{C})$  tâm  $I$ , bán kính  $R \Leftrightarrow d(I, \Delta) = R$ .

## 2. Các ví dụ

 **Ví dụ 1.** Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn

$$(\mathcal{C}) : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

tại điểm  $M_0(4 ; 2)$  thuộc đường tròn  $(\mathcal{C})$ .

*GIẢI*

$(\mathcal{C})$  có tâm là điểm  $(1 ; -2)$ . Vậy phương trình tiếp tuyến với  $(\mathcal{C})$  tại  $M_0(4 ; 2)$  có dạng :

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4 - 1)(x - 4) + (2 + 2)(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 20 = 0.$$

 **Ví dụ 2.** Lập phương trình tiếp tuyến với đường tròn

$$(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0.$$

Biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm  $A(3 ; -2)$ .

*GIẢI*

Phương trình của đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $A(3 ; -2)$  có dạng

$$y + 2 = k(x - 3) \Leftrightarrow kx - y - 2 - 3k = 0.$$

$(\mathcal{C})$  có tâm  $I(2 ; 1)$  và có bán kính  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = \sqrt{4 + 1 - 0} = \sqrt{5}$ .

$$\Delta \text{ tiếp xúc với } (\mathcal{C}) \Leftrightarrow d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|2k - 1 - 2 - 3k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow (3+k)^2 = 5(k^2 + 1) \Leftrightarrow 4k^2 - 6k - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy có hai tiếp tuyến với  $(\mathcal{C})$  kẻ từ  $A$  là :  $\Delta_1 : 2x - y - 8 = 0 ;$

$$\Delta_2 : x + 2y + 1 = 0.$$



**Ví dụ 3.** Viết phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  với đường tròn

$$(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$$

biết rằng  $\Delta$  song song với đường thẳng  $d : 3x - y + 2006 = 0$ .

*GIẢI*

$(\mathcal{C})$  có tâm  $I(2 ; -3)$  và bán kính  $R = \sqrt{10}$ .

Phương trình của đường thẳng  $\Delta$  song song với  $d$  có dạng :

$$\Delta : 3x - y + c = 0.$$

$\Delta$  tiếp xúc với  $(\mathcal{C})$  khi và chỉ khi

$$d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|6 + 3 + c|}{\sqrt{9 + 1}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |c + 9| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c = -19 \end{cases}.$$

Vậy phương trình của  $\Delta$  là  $3x - y + 1 = 0$  hay  $3x - y - 19 = 0$ .

## C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

**3.15.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , hãy lập phương trình của đường tròn  $(\mathcal{C})$  có tâm là điểm  $(2 ; 3)$  và thoả mãn điều kiện sau :

- a)  $(\mathcal{C})$  có bán kính là 5 ;
- b)  $(\mathcal{C})$  đi qua gốc toạ độ ;
- c)  $(\mathcal{C})$  tiếp xúc với trục  $Ox$  ;
- d)  $(\mathcal{C})$  tiếp xúc với trục  $Oy$  ;
- e)  $(\mathcal{C})$  tiếp xúc với đường thẳng  $\Delta : 4x + 3y - 12 = 0$ .

**3.16.** Cho ba điểm  $A(1 ; 4)$ ,  $B(-7 ; 4)$ ,  $C(2 ; -5)$ .

- a) Lập phương trình đường tròn  $(\mathcal{C})$  ngoại tiếp tam giác  $ABC$  ;
- b) Tìm tâm và bán kính của  $(\mathcal{C})$ .

- 3.17.** Cho đường tròn  $(\mathcal{C})$  đi qua hai điểm  $A(-1 ; 2)$ ,  $B(-2 ; 3)$  và có tâm ở trên đường thẳng  $\Delta : 3x - y + 10 = 0$ .
- Tìm tọa độ tâm của  $(\mathcal{C})$ ;
  - Tính bán kính  $R$  của  $(\mathcal{C})$ ;
  - Viết phương trình của  $(\mathcal{C})$ .
- 3.18.** Cho ba đường thẳng  $\Delta_1 : 3x + 4y - 1 = 0$   
 $\Delta_2 : 4x + 3y - 8 = 0$   
 $d : 2x + y - 1 = 0$ .
- Lập phương trình các đường phân giác của các góc hợp bởi  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ .
  - Xác định tọa độ tâm  $I$  của đường tròn  $(\mathcal{C})$  biết rằng  $I$  nằm trên  $d$  và  $(\mathcal{C})$  tiếp xúc với  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ .
  - Viết phương trình của  $(\mathcal{C})$ .
- 3.19.** Lập phương trình của đường tròn  $(\mathcal{C})$  đi qua hai điểm  $A(1 ; 2)$ ,  $B(3 ; 4)$  và tiếp xúc với đường thẳng  $\Delta : 3x + y - 3 = 0$ .
- 3.20.** Lập phương trình của đường tròn đường kính  $AB$  trong các trường hợp sau :
- $A$  có tọa độ  $(-1 ; 1)$ ,  $B$  có tọa độ  $(5 ; 3)$ ;
  - $A$  có tọa độ  $(-1 ; -2)$ ,  $B$  có tọa độ  $(2 ; 1)$ .
- 3.21.** Lập phương trình của đường tròn  $(\mathcal{C})$  tiếp xúc với các trục tọa độ và đi qua điểm  $M(4 ; 2)$ .
- 3.22.** Cho đường tròn  $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - x - 7y = 0$  và đường thẳng  $d : 3x + 4y - 3 = 0$ .
- Tìm tọa độ giao điểm của  $(\mathcal{C})$  và  $(d)$ .
  - Lập phương trình tiếp tuyến với  $(\mathcal{C})$  tại các giao điểm đó.
  - Tìm tọa độ giao điểm của hai tiếp tuyến.
- 3.23.** Cho đường tròn  $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$  và điểm  $A(1 ; 3)$ .
- Chứng tỏ rằng điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn  $(\mathcal{C})$ .
  - Lập phương trình tiếp tuyến với  $(\mathcal{C})$  xuất phát từ điểm  $A$ .

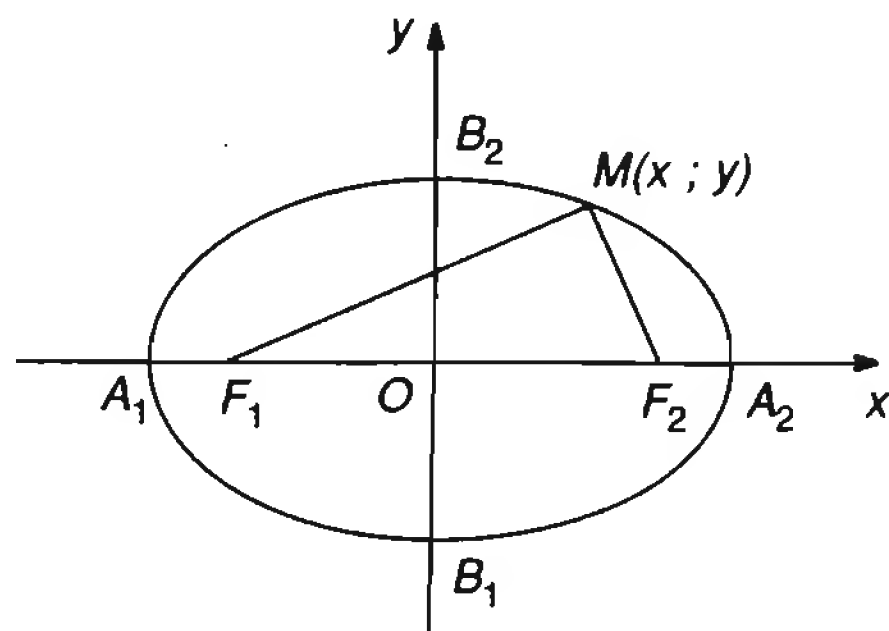
- 3.24. Lập phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  của đường tròn  $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$  biết rằng  $\Delta$  vuông góc với đường thẳng  $d : 3x - y + 4 = 0$ .
- 3.25. Cho đường tròn  $(\mathcal{C}) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$  và điểm  $M(2 ; -1)$ .
- a) Chứng tỏ rằng qua  $M$  ta vẽ được hai tiếp tuyến  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  với  $(\mathcal{C})$ . Hãy viết phương trình của  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ .
- b) Gọi  $M_1$  và  $M_2$  lần lượt là hai tiếp điểm của  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  với  $(\mathcal{C})$ , hãy viết phương trình của đường thẳng  $d$  đi qua  $M_1$  và  $M_2$ .
- 3.26. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn  $(\mathcal{C})$  có phương trình  $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$  biết rằng tiếp tuyến đó đi qua gốc toạ độ  $O$ .
- 3.27. Cho hai đường tròn  $(\mathcal{C}_1) : x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$   
và  $(\mathcal{C}_2) : x^2 + y^2 - 12x - 6y + 44 = 0$ .
- a) Tìm tâm và bán kính của  $(\mathcal{C}_1)$  và  $(\mathcal{C}_2)$ .
- b) Lập phương trình tiếp tuyến chung của  $(\mathcal{C}_1)$  và  $(\mathcal{C}_2)$ .

### §3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELIP

#### A. CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho hai điểm  $F_1(-c ; 0)$ ,  $F_2(c ; 0)$  và độ dài không đổi  $2a$  ( $a > c > 0$ ). Elip  $(E)$  là tập hợp các điểm  $M$  sao cho  $F_1M + F_2M = 2a$  (h.3.4). Ta có thể viết :

$$(E) = \left\{ M / F_1M + F_2M = 2a \right\}.$$

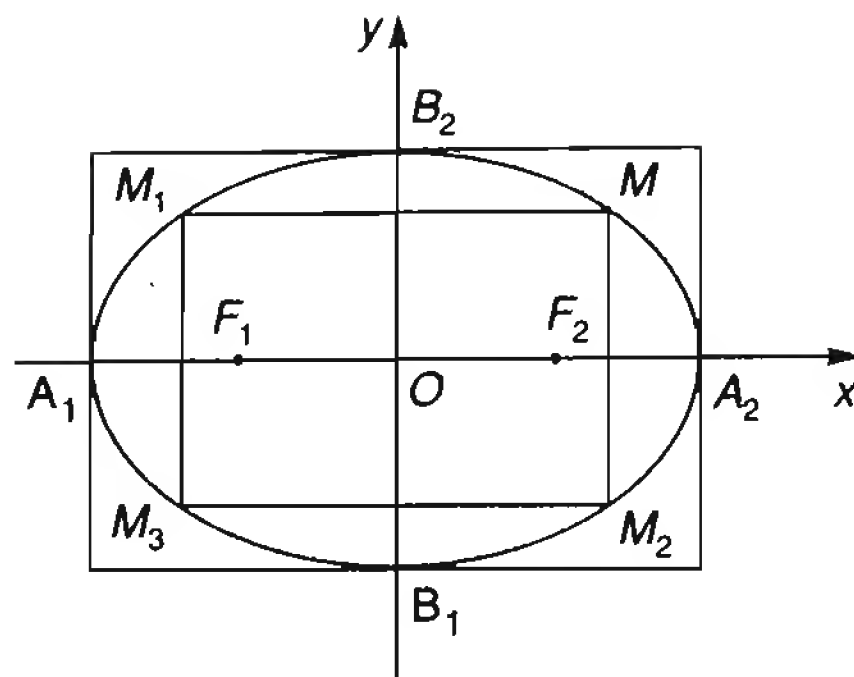


Hình 3.4

2. Phương trình chính tắc của elip  $(E)$  là :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a^2 = b^2 + c^2$ ).

3. Các thành phần của elip ( $E$ ) là :

- Hai tiêu điểm :  $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$  ;
- Bốn đỉnh :  $A_1(-a; 0), A_2(a; 0),$   
 $B_1(0; -b), B_2(0; b)$  ;
- Độ dài trục lớn :  $A_1A_2 = 2a$  ;
- Độ dài trục nhỏ :  $B_1B_2 = 2b$  ;
- Tiêu cự :  $F_1F_2 = 2c$  (h.3.5).



Hình 3.5

4. Hình dạng của elip ( $E$ ) :

- ( $E$ ) có hai trục đối xứng là  $Ox, Oy$  và có tâm đối xứng là gốc tọa độ ;
- Mọi điểm của elip ( $E$ ) ngoại trừ bốn đỉnh đều nằm trong hình chữ nhật có kích thước  $2a$  và  $2b$  giới hạn bởi các đường thẳng  $x = \pm a, y = \pm b$ . Hình chữ nhật đó gọi là hình chữ nhật cơ sở của elip.

## B. DẠNG TOÁN CƠ BẢN



### VẤN ĐỀ 1

Lập phương trình chính tắc của một elip khi biết các thành phần đủ để xác định elip đó

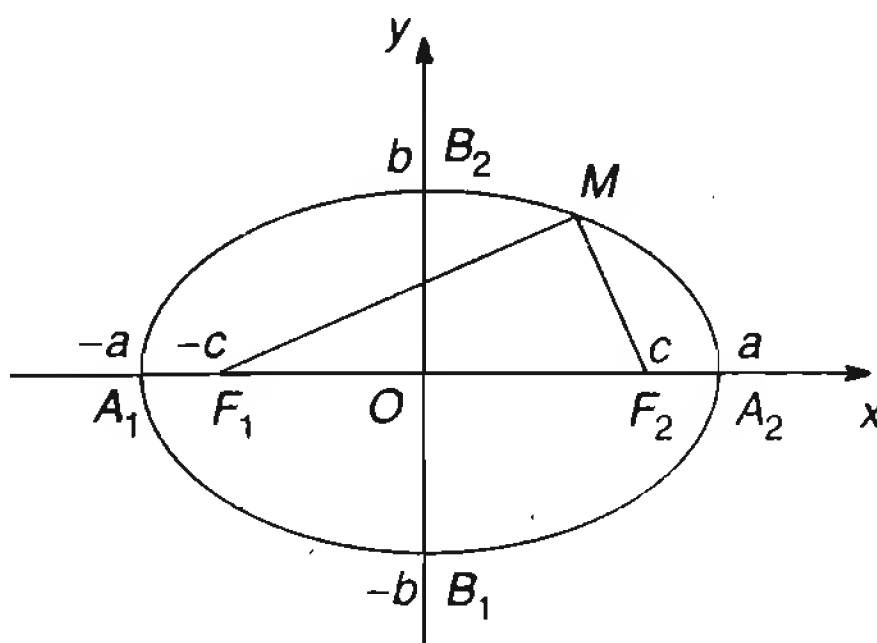
#### 1. Phương pháp

- Từ các thành phần đã biết, áp dụng công thức liên quan ta tìm được phương trình chính tắc của elip.
- Lập phương trình chính tắc của elip theo công thức :

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- Ta có các hệ thức (h.3.6):

- $0 < b < a$
- $c^2 = a^2 - b^2$



Hình 3.6

- $F_1F_2 = 2c$  (tiêu cự)
- $A_1A_2 = 2a$  (độ dài trục lớn)
- $B_1B_2 = 2b$  (độ dài trục nhỏ)
- $M \in (E) \Leftrightarrow F_1M + F_2M = 2a$ .

– Ta có tọa độ các điểm đặc biệt của elip  $(E)$  :

- Hai tiêu điểm :  $F_1(-c ; 0), F_2(c ; 0)$
- Hai đỉnh trên trục lớn :  $A_1(-a ; 0), A_2(a ; 0)$
- Hai đỉnh trên trục nhỏ :  $B_1(0 ; -b), B_2(0 ; b)$ .

## 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Lập phương trình chính tắc của elip  $(E)$  trong mỗi trường hợp sau :

a) Độ dài trục lớn bằng 10 và tiêu cự bằng 6 ;

b) Một tiêu điểm là điểm  $(-\sqrt{3}; 0)$  và điểm  $\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  nằm trên elip.

*GIẢI*

a) Ta có  $2a = 10$  suy ra  $a = 5, 2c = 6 \Rightarrow c = 3$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16.$$

Vậy phương trình chính tắc của elip  $(E)$  là :  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

b) Phương trình chính tắc của  $(E)$  có dạng  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Vì  $(E)$  có một tiêu điểm  $F_1(-\sqrt{3}; 0)$  nên  $c = \sqrt{3}$ . Ta có :

$$\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in (E) \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \quad (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 3. \quad (2)$$



$$\begin{aligned} \text{Thế (2) vào (1) ta được } \frac{1}{b^2+3} + \frac{3}{4b^2} &= 1 \Leftrightarrow 4b^2 + 3(b^2+3) = 4b^2(b^2+3) \\ &\Leftrightarrow 4b^4 + 5b^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 1. \end{aligned}$$

Từ (2) suy ra  $a^2 = 4$ .

Vậy phương trình chính tắc của elip  $(E)$  là :  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ .



**Ví dụ 2.** Lập phương trình chính tắc của elip  $(E)$  trong mỗi trường hợp sau :

a) Một đỉnh trên trục lớn là điểm  $(3 ; 0)$  và một tiêu điểm là điểm  $(-2 ; 0)$  ;

b)  $(E)$  đi qua hai điểm  $M(0 ; 1)$  và  $N\left(1 ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

*GIẢI*

a) Ta có  $a = 3 ; c = 2$ .

Suy ra  $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$ .

Vậy phương trình chính tắc của elip là :

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

b) Phương trình chính tắc của  $(E)$  có dạng :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Do  $(E)$  đi qua hai điểm  $M(0 ; 1)$  và  $N\left(1 ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  nên thay toạ độ của  $M$  và  $N$

vào phương trình của  $(E)$  ta được :

$$\begin{cases} \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 1 \\ a^2 = 4. \end{cases}$$

Vậy phương trình chính tắc của elip  $(E)$  là :  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ .



## VẤN ĐỀ 2

Xác định các thành phần của một elip khi biết phương trình chính tắc của elip đó

### 1. Phương pháp

Các thành phần của elip  $(E)$ :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (h.3.7):

– Trục lớn của  $(E)$  nằm trên  $Ox$ ,  $A_1A_2 = 2a$ ;

– Trục nhỏ của  $(E)$  nằm trên  $Oy$ ,  $B_1B_2 = 2b$ ;

– Hai tiêu điểm:  $F_1(-c; 0)$ ,  $F_2(c; 0)$

$$\text{với } c = \sqrt{a^2 - b^2};$$

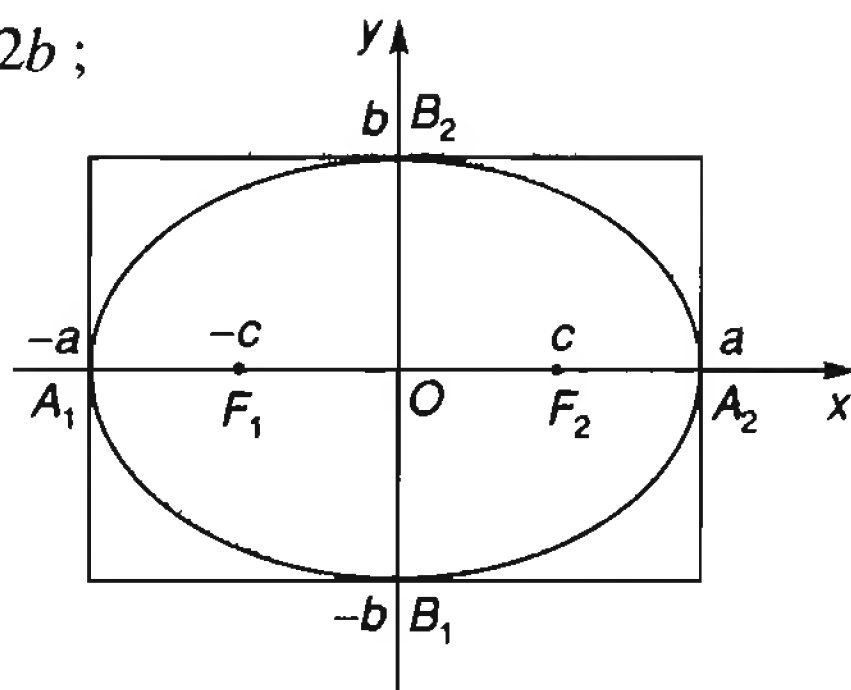
– Tiêu cự:  $F_1F_2 = 2c$ ;

– Bốn đỉnh:  $A_1(-a; 0)$ ,  $A_2(a; 0)$ ,

$$B_1(0; -b), B_2(0; b);$$

– Tỷ số  $\frac{c}{a} < 1$ ;

– Phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là:  $x = \pm a$ ;  $y = \pm b$ .



Hình 3.7

### 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Xác định độ dài các trục, tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh và

vẽ elip  $(E)$  có phương trình  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

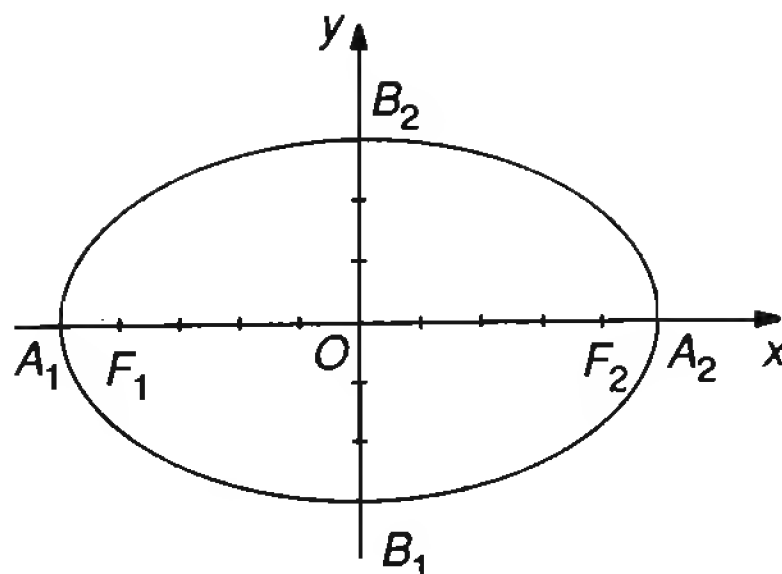
**GIẢI**

Phương trình  $(E)$  có dạng:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Do đó:  $\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4.$$

Vậy  $(E)$  có :

- Trục lớn :  $A_1A_2 = 2a = 10$  ;
- Trục nhỏ :  $B_1B_2 = 2b = 6$  ;
- Hai tiêu điểm :  $F_1(-4 ; 0), F_2(4 ; 0)$  ;
- Bốn đỉnh :  $A_1(-5 ; 0), A_2(5 ; 0),$   
 $B_1(0 ; -3), B_2(0 ; 3).$



Hình 3.8

Hình vẽ của  $(E)$  như hình 3.8.



**Ví dụ 2.** Cho elip  $(E)$  có phương trình

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Hãy viết phương trình đường tròn  $(\mathcal{C})$  có đường kính là  $F_1F_2$  trong đó  $F_1$  và  $F_2$  là hai tiêu điểm của  $(E)$ .

*GIẢI*

Phương trình  $(E)$  có dạng  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Ta có  $a^2 = 100, b^2 = 36.$

Suy ra  $c^2 = a^2 - b^2 = 64$

$$c = 8.$$

Đường tròn đường kính  $F_1F_2$  có tâm là gốc toạ độ và có bán kính  $R = c = 8.$

Vậy phương trình của  $(\mathcal{C})$  là :  $x^2 + y^2 = 64.$



### **VẤN ĐỀ 3**

Điểm  $M$  di động trên một elip

#### **1. Phương pháp**

Để chứng tỏ điểm  $M$  di động trên một elip ta có hai cách (h.3.9) :

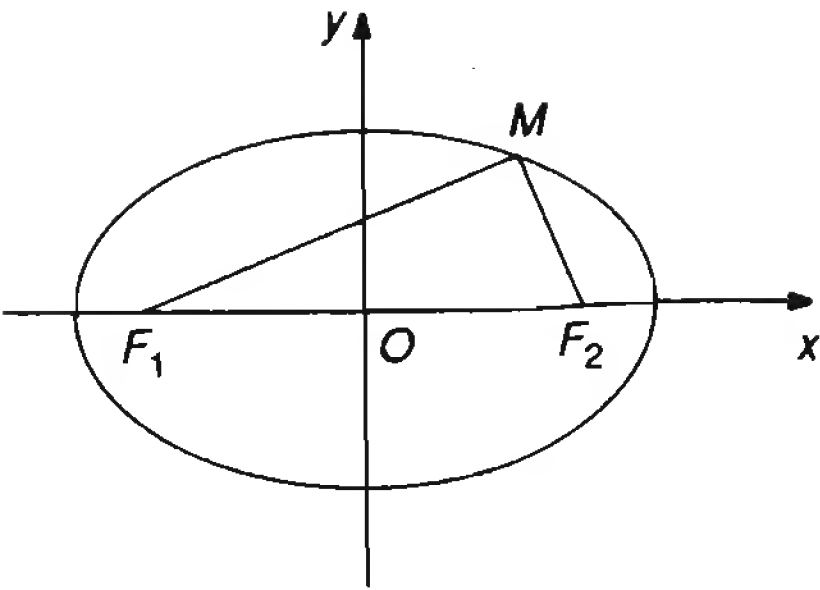
*Cách 1* : Chứng minh tổng khoảng cách từ  $M$  đến hai điểm cố định  $F_1, F_2$  là một hằng số  $2a$  ( $F_1F_2 < 2a$ ).

Khi đó  $M$  di động trên elip  $(E)$  có hai tiêu điểm  $F_1, F_2$  và trục lớn là  $2a$ .

*Cách 2* : Chứng minh trong mặt phẳng toạ độ  $Oxy$  điểm  $M(x ; y)$  có toạ độ thoả mãn phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

với  $a, b$  là hai hằng số thoả mãn  $0 < b < a$ .



Hình 3.9

### 2. Các ví dụ



**Ví dụ 1.** Cho hai đường tròn  $\mathcal{C}_1(F_1 ; R_1)$  và  $\mathcal{C}_2(F_2 ; R_2)$ .  $(\mathcal{C}_1)$  nằm trong  $(\mathcal{C}_2)$  và  $F_1 \neq F_2$ . Gọi  $M$  là tâm của đường tròn  $(\mathcal{C})$  thay đổi nhưng luôn tiếp xúc ngoài với  $(\mathcal{C}_1)$  và tiếp xúc trong với  $(\mathcal{C}_2)$ . Hãy chứng tỏ điểm  $M$  di động trên một elip.

*GIẢI*

Ta có  $MF_1 = R + R_1 ; MF_2 = R_2 - R$ .

Suy ra  $MF_1 + MF_2 = R_1 + R_2$ .

Vậy  $M$  di động trên elip có hai tiêu điểm là  $F_1$  và  $F_2$  và có trục lớn là  $2a = R_1 + R_2$ .



**Ví dụ 2.** Trong mặt phẳng toạ độ  $Oxy$  cho điểm  $M(x ; y)$  di động có toạ độ luôn thoả mãn

$$\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$$

trong đó  $t$  là tham số thay đổi.

Hãy chứng minh điểm  $M$  di động trên một elip.

**GIẢI**

$$\text{Ta có : } \begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} = \cos t \\ \frac{y}{4} = \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{25} = \cos^2 t \\ \frac{y^2}{16} = \sin^2 t \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Vậy  $M$  di động trên elip có phương trình là :  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

### C. CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP

**3.28.** Viết phương trình chính tắc của elip ( $E$ ) trong mỗi trường hợp sau :

- a) Độ dài trục nhỏ bằng 12 và tiêu cự bằng 16 ;
- b) Một tiêu điểm là  $(12 ; 0)$  và điểm  $(13 ; 0)$  nằm trên elip.

**3.29.** Tìm tọa độ các tiêu điểm, các đỉnh, độ dài các trục của mỗi elip có phương trình sau :

- a)  $4x^2 + 9y^2 = 36$  ;
- b)  $x^2 + 4y^2 = 4$  .

**3.30.** Cho đường tròn  $\mathcal{C}_1(F_1; 2a)$  cố định và một điểm  $F_2$  cố định nằm trong  $(\mathcal{C}_1)$ .

Xét đường tròn di động  $(\mathcal{C})$  có tâm  $M$ . Cho biết  $(\mathcal{C})$  luôn đi qua điểm  $F_2$  và  $(\mathcal{C})$  luôn tiếp xúc với  $(\mathcal{C}_1)$ . Hãy chứng tỏ  $M$  di động trên một elip.

**3.31.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho điểm  $M(x ; y)$  di động có tọa độ luôn thỏa mãn

$$\begin{cases} x = 7 \cos t \\ y = 5 \sin t \end{cases}$$

Trong đó  $t$  là tham số. Hãy chứng tỏ  $M$  di động trên một elip.

**3.32.** Viết phương trình chính tắc của elip trong các trường hợp sau :

- a) Độ dài trục lớn bằng 26 và tỉ số  $\frac{c}{a}$  bằng  $\frac{5}{13}$  ;
- b) Tiêu điểm  $F_1(-6 ; 0)$  và tỉ số  $\frac{c}{a}$  bằng  $\frac{2}{3}$  .

- 3.33.** Viết phương trình chính tắc của elip  $(E)$  có hai tiêu điểm là  $F_1$  và  $F_2$  biết
- $(E)$  đi qua hai điểm  $M\left(4; \frac{9}{5}\right)$  và  $N\left(3; \frac{12}{5}\right)$ ;
  - $(E)$  đi qua  $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$  và tam giác  $MF_1F_2$  vuông tại  $M$ .
- 3.34.** Cho elip  $(E) : 9x^2 + 25y^2 = 225$ .
- Tìm toạ độ hai tiêu điểm  $F_1, F_2$  và các đỉnh của  $(E)$ .
  - Tìm điểm  $M \in (E)$  sao cho  $M$  nhìn  $F_1F_2$  dưới một góc vuông.
- 3.35.** Cho elip  $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $0 < b < a$ ). Tính tỉ số  $\frac{c}{a}$  trong các trường hợp sau :
- Trục lớn bằng ba lần trục nhỏ ;
  - Đỉnh trên trục nhỏ nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông ;
  - Khoảng cách giữa đỉnh trên trục nhỏ và đỉnh trên trục lớn bằng tiêu cự.
- 3.36.** Cho elip  $(E) : 4x^2 + 9y^2 = 36$  và điểm  $M(1; 1)$ . Viết phương trình đường thẳng  $(d)$  đi qua  $M$  và cắt  $(E)$  tại hai điểm  $A$  và  $B$  sao cho  $M$  là trung điểm của  $AB$ .

### CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

- 3.37.** Cho ba điểm  $A(2; 1), B(0; 5), C(-5; -10)$ .
- Tìm toạ độ trọng tâm  $G$ , trực tâm  $H$  và tâm  $I$  đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .
  - Chứng minh  $I, G, H$  thẳng hàng.
  - Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .
- 3.38.** Cho đường thẳng  $\Delta$  có phương trình tham số  $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = t. \end{cases}$
- Hai điểm  $A(-7; 3)$  và  $B(2; 1)$  có nằm trên  $\Delta$  không ?
  - Tìm toạ độ giao điểm của  $\Delta$  với hai trục  $Ox$  và  $Oy$ .
  - Tìm trên  $\Delta$  điểm  $M$  sao cho đoạn  $BM$  ngắn nhất.

- 3.39.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ . Biết  $A(3 ; 0)$ ,  $B(-3 ; 3)$  và phương trình đường thẳng chứa cạnh  $CD : x + 2y - 8 = 0$ . Tìm phương trình các đường thẳng chứa các cạnh còn lại.
- 3.40.** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho đường thẳng  $\Delta : x - y + 2 = 0$  và điểm  $A(2 ; 0)$ .  
a) Chứng minh rằng hai điểm  $A$  và  $O$  nằm về cùng một phía đối với đường thẳng  $\Delta$ .  
b) Tìm điểm  $M$  trên  $\Delta$  sao cho độ dài đường gấp khúc  $OMA$  ngắn nhất.
- 3.41.** Cho ba điểm  $A(3 ; 5)$ ,  $B(2 ; 3)$  và  $C(6 ; 2)$ .  
a) Viết phương trình đường tròn ( $\mathcal{C}$ ) ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .  
b) Hãy xác định toạ độ của tâm và bán kính của ( $\mathcal{C}$ ).
- 3.42.** Cho phương trình  $x^2 + y^2 - 2mx - 4(m - 2)y + 6 - m = 0$ . (1)  
a) Tìm điều kiện của  $m$  để (1) là phương trình của đường tròn, ta kí hiệu là  $(C_m)$ .  
b) Tìm tập hợp các tâm của  $(C_m)$  khi  $m$  thay đổi.
- 3.43.** Lập phương trình chính tắc của elip ( $E$ ) trong mỗi trường hợp sau :  
a) Một đỉnh là  $(0 ; -2)$  và một tiêu điểm là  $(-1 ; 0)$  ;  
b) Tiêu cự bằng 6, tỉ số  $\frac{c}{a}$  bằng  $\frac{3}{5}$ .
- 3.44.** Cho elip ( $E$ ) :  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  và đường thẳng  $\Delta$  thay đổi có phương trình tổng quát  $Ax + By + C = 0$  luôn thoả mãn  $25A^2 + 9B^2 = C^2$ . Tính tích khoảng cách từ hai tiêu điểm  $F_1, F_2$  của ( $E$ ) đến đường thẳng  $\Delta$ .
- 3.45.** Cho elip ( $E$ ) :  $x^2 + 4y^2 = 16$ .  
a) Xác định toạ độ các tiêu điểm và các đỉnh của elip ( $E$ ).  
b) Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M\left(1 ; \frac{1}{2}\right)$  và có vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = (1 ; 2)$ .  
c) Tìm toạ độ các giao điểm  $A$  và  $B$  của đường thẳng  $\Delta$  và elip ( $E$ ). Chứng minh  $MA = MB$ .

## CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

3.46. Cho ba điểm  $A(1 ; 4)$ ,  $B(3 ; 2)$ ,  $C(5 ; 4)$ . Toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  là

- (A)  $(2 ; 5)$  (B)  $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$   
(C)  $(9 ; 10)$  (D)  $(3 ; 4)$ .

3.47. Cho đường thẳng  $\Delta$  có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = 5 - \frac{1}{2}t \\ y = -3 + 3t. \end{cases}$$

Một vectơ chỉ phương của  $\Delta$  có toạ độ là

- (A)  $(-1 ; 6)$  (B)  $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$   
(C)  $(5 ; -3)$  (D)  $(-5 ; 3)$

3.48. Lập phương trình đường thẳng  $\Delta$  song song với đường thẳng  $d : 3x - 2y + 12 = 0$  và cắt  $Ox$ ,  $Oy$  lần lượt tại  $A$ ,  $B$  sao cho  $AB = \sqrt{13}$ . Ta được kết quả là :

- (A)  $3x - 2y + 12 = 0$  ; (B)  $3x - 2y - 12 = 0$  ;  
(C)  $6x - 4y - 12 = 0$  ; (D)  $3x - 4y - 6 = 0$ .

3.49. Trong các điểm có toạ độ sau đây, điểm nào nằm trên đường thẳng  $\Delta$  có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t? \end{cases}$$

- (A)  $(1 ; 1)$  (B)  $(0 ; -2)$   
(C)  $(1 ; -1)$  (D)  $(-1 ; 1)$ .

3.50. Đường thẳng đi qua điểm  $M(1 ; 2)$  và song song với đường thẳng  $d : 4x + 2y + 1 = 0$  có phương trình tổng quát là :

- (A)  $4x + 2y + 3 = 0$  ; (B)  $2x + y + 4 = 0$  ;  
(C)  $2x + y - 4 = 0$  ; (D)  $x - 2y + 3 = 0$ .



- 3.51.** Cho đường thẳng  $d$  có phương trình tổng quát :  $3x + 5y + 2006 = 0$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?
- (A)  $d$  có vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = (3 ; 5)$  ;
- (B)  $d$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (5 ; -3)$  ;
- (C)  $d$  có hệ số góc  $k = \frac{5}{3}$  ;
- (D)  $d$  song song với đường thẳng  $3x + 5y = 0$ .
- 3.52.** Hình chiếu vuông góc của điểm  $M(1 ; 4)$  xuống đường thẳng  $\Delta : x - 2y + 2 = 0$  có toạ độ là
- (A)  $(3 ; 0)$  ; (B)  $(0 ; 3)$  ;
- (C)  $(2 ; 2)$  ; (D)  $(2 ; -2)$ .
- 3.53.** Đường thẳng đi qua hai điểm  $A(1 ; 1)$ ,  $B(2 ; 2)$  có phương trình tham số là :
- (A)  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$  ; (B)  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$  ;
- (C)  $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$  ; (D)  $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$ .
- 3.54.** Đường tròn  $(C)$  có tâm là gốc  $O(0 ; 0)$  và tiếp xúc với đường thẳng  $\Delta : 8x + 6y + 100 = 0$ . Bán kính của đường tròn  $(C)$  là :
- (A) 4 ; (B) 6 ;
- (C) 8 ; (D) 10.
- 3.55.** Góc giữa hai đường thẳng :  $\Delta_1 : x + 2y + 4 = 0$   
 $\Delta_2 : x - 3y + 6 = 0$   
 có số đo là :
- (A)  $30^\circ$  ; (B)  $60^\circ$  ;
- (C)  $45^\circ$  ; (D)  $23^\circ 12'$ .
- 3.56.** Cho hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  lần lượt có phương trình  $x - y = 0$  và  $\sqrt{3}x - y = 0$ . Góc giữa  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  có số đo là
- (A)  $30^\circ$  ; (B)  $15^\circ$  ;
- (C)  $45^\circ$  ; (D)  $75^\circ$ .

**3.57.** Phương trình nào trong các phương trình sau đây không là phương trình đường tròn ?

(A)  $x^2 + y^2 - 4 = 0$  ;

(B)  $x^2 + y^2 + x + y + 2 = 0$  ;

(C)  $x^2 + y^2 + x + y = 0$  ;

(D)  $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ .

**3.58.** Cho 3 điểm  $A(-2 ; 0)$ ,  $B(\sqrt{2} ; \sqrt{2})$ ,  $C(2 ; 0)$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  có phương trình là

(A)  $x^2 + y^2 - 4 = 0$  ;

(B)  $x^2 + y^2 - 4x + 4 = 0$  ;

(C)  $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$  ;

(D)  $x^2 + y^2 = 2$ .

**3.59.** Cho hai điểm  $A(3 ; 0)$ ,  $B(0 ; 4)$ . Đường tròn nội tiếp tam giác  $OAB$  có phương trình là

(A)  $x^2 + y^2 = 1$  ;

(B)  $x^2 + y^2 = 2$  ;

(C)  $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$  ;

(D)  $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$ .

**3.60.** Cho hai đường tròn :

$(C_1) : x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$

$(C_2) : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ .

Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :

(A)  $(C_1)$  cắt  $(C_2)$  ;

(B)  $(C_1)$  không có điểm chung với  $(C_2)$  ;

(C)  $(C_1)$  tiếp xúc trong với  $(C_2)$  ;

(D)  $(C_1)$  tiếp xúc ngoài với  $(C_2)$ .

- 3.61.** Tiếp tuyến với đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 = 2$  tại điểm  $M_0(1 ; 1)$  có phương trình là :
- (A)  $x + y - 2 = 0 ;$  (B)  $x + y + 1 = 0 ;$   
 (C)  $2x + y - 3 = 0 ;$  (D)  $x - y = 0.$
- 3.62.** Số đường thẳng đi qua điểm  $M(5 ; 6)$  và tiếp xúc với đường tròn  $(C) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$  là
- (A) 0 (B) 1  
 (C) 2 (D) 3.
- 3.63.** Có bao nhiêu tiếp tuyến với đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0$  đi qua gốc toạ độ ?
- (A) 0 (B) 1  
 (C) 2 (D) 3.
- 3.64.** Cho elip  $(E)$  có hai tiêu điểm là  $F_1, F_2$  và có độ dài trục lớn bằng  $2a$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?
- (A)  $2a = F_1F_2 ;$  (B)  $2a > F_1F_2 ;$   
 (C)  $2a < F_1F_2 ;$  (D)  $4a = F_1F_2 .$
- 3.65.** Một elip  $(E)$  có phương trình chính tắc  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .  
 Gọi  $2c$  là tiêu cự của  $(E)$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?
- (A)  $c^2 = a^2 + b^2 ;$  (B)  $b^2 = a^2 + c^2 ;$   
 (C)  $a^2 = b^2 + c^2 ;$  (D)  $c = a + b .$
- 3.66.** Cho điểm  $M(2 ; 3)$  nằm trên đường elip  $(E)$  có phương trình chính tắc :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Trong các điểm sau đây điểm nào không nằm trên elip  $(E)$  :
- (A)  $M_1(-2 ; 3)$  (B)  $M_2(2 ; -3)$   
 (C)  $M_3(-2 ; -3)$  (D)  $M_4(3 ; 2).$

- 3.67. Cho elip  $(E)$  có phương trình chính tắc  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ . Trong các điểm có toạ độ sau đây điểm nào là tiêu điểm của elip  $(E)$  ?  
 (A)  $(10 ; 0)$  (B)  $(6 ; 0)$   
 (C)  $(4 ; 0)$  (D)  $(-8 ; 0)$ .
- 3.68. Cho elip  $(E)$  có tiêu điểm là  $F_1(4 ; 0)$  và có một đỉnh là  $A(5 ; 0)$ . Phương trình chính tắc của  $(E)$  là  
 (A)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  ; (B)  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$  ;  
 (C)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  ; (D)  $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1$ .
- 3.69. Elip  $(E) : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  và đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 = 25$  có bao nhiêu điểm chung ?  
 (A) 0 ; (B) 1 ;  
 (C) 2 ; (D) 4.
- 3.70. Cho elip  $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  và đường thẳng  $\Delta : y = 3$ . Tích các khoảng cách từ hai tiêu điểm của  $(E)$  đến  $\Delta$  bằng giá trị nào sau đây ?  
 (A) 16 ; (B) 9 ;  
 (C) 81 ; (D) 7.
- 3.71. Đường tròn đi qua ba điểm  $A(0 ; 3)$  ;  $B(-3 ; 0)$  và  $C(3 ; 0)$  có phương trình là  
 (A)  $x^2 + y^2 = 3$  ; (B)  $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$  ;  
 (C)  $x^2 + y^2 - 6x + 6y = 0$  ; (D)  $x^2 + y^2 - 9 = 0$ .
- 3.72. Với giá trị nào của  $m$  thì đường thẳng  $\Delta : \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + m = 0$  tiếp xúc với đường tròn  $x^2 + y^2 = 1$  ?  
 (A)  $m = 1$  ; (B)  $m = 0$  ;  
 (C)  $m = \sqrt{2}$  ; (D)  $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

# HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

## §1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

3.1. a)  $\begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = -2 - 3t. \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x = \sqrt{3} + 2t \\ y = 1 + 3t. \end{cases}$

3.2. a)  $M(2 + 2t ; 3 + t) \in \Delta.$

$$AM = 5 \Leftrightarrow (2 + 2t)^2 + (2 + t)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow 5t^2 + 12t - 17 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -\frac{17}{5}.$$

Vậy  $M$  có tọa độ là  $(4 ; 4)$  hay  $\left(\frac{-24}{5} ; \frac{-2}{5}\right).$

b)  $M(2 + 2t ; 3 + t) \in \Delta$

$$d : x + y + 1 = 0$$

$$M \in d \Leftrightarrow 2 + 2t + 3 + t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -2.$$

Vậy  $M$  có tọa độ là  $(-2 ; 1).$

c)  $M(2 + 2t ; 3 + t) \in \Delta$

$$\overrightarrow{AM} = (2 + 2t ; 2 + t), \vec{u}_{\Delta} = (2 ; 1)$$

$$\text{Ta có : } AM \text{ ngắn nhất} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{u}_{\Delta}$$

$$\Leftrightarrow 2(2 + 2t) + (2 + t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{6}{5}. \text{ Vậy } M \text{ có tọa độ là } \left(-\frac{2}{5} ; \frac{9}{5}\right).$$

3.3. a)  $3x - 2y - 1 = 0 ;$

b)  $y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Leftrightarrow x + 2y = 0 ;$

c)  $3x - 2y - 6 = 0.$

3.4. Gọi  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  lần lượt là các đường trung trực đi qua  $M, N, P$ .

Ta có :  $\vec{n}_{\Delta_1} = \overrightarrow{NP} = (-2 ; 3)$ .

Vậy  $\Delta_1$  có phương trình  $-2(x + 1) + 3y = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 2 = 0$ .

Ta có  $\vec{n}_{\Delta_2} = \overrightarrow{MP} = (3 ; 4)$ .

Vậy  $\Delta_2$  có phương trình  $3(x - 4) + 4(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 16 = 0$ .

Ta có  $\vec{n}_{\Delta_3} = \overrightarrow{MN} = (5 ; 1)$ .

Vậy  $\Delta_3$  có phương trình  $5(x - 2) + (y - 4) = 0 \Leftrightarrow 5x + y - 14 = 0$ .

3.5. Trường hợp 1 :  $a \neq 0$  và  $b \neq 0$

Phương trình  $\Delta$  có dạng  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ . Ta có  $|a| = |b|$ .

•  $b = a$

$\Delta$  có dạng :  $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$ .

$M \in \Delta \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 3$ .

Vậy  $\Delta : \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow x + y - 3 = 0$ .

•  $b = -a$

$\Delta$  có dạng  $\frac{x}{a} + \frac{y}{-a} = 1$ .

$M \in \Delta \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{-a} = 1 \Leftrightarrow a = -1$ .

Vậy  $\Delta : \frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$ .

Trường hợp 2 :  $b = a = 0$

$\Delta$  đi qua  $M$  và  $O$  nên có phương trình  $2x - y = 0$ .

3.6. Theo đề bài toạ độ của điểm  $A$  luôn thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - 3y = -11 \\ 3x + 7y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3. \end{cases}$$

Vì  $AC \perp BH$  nên  $AC$  có dạng  $5x + 3y + c = 0$ , ta có :

$$A \in AC \Leftrightarrow -10 + 9 + c = 0 \Leftrightarrow c = 1.$$

Vậy phương trình đường thẳng chứa cạnh  $AC$  :  $5x + 3y + 1 = 0$ .

Toạ độ của điểm  $B$  luôn luôn thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - 3y = -11 \\ 3x - 5y = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5. \end{cases}$$

Vì  $BC \perp AH$  nên  $BC$  có dạng  $7x - 3y + c = 0$ , ta có :

$$B \in BC \Leftrightarrow 28 - 15 + c = 0 \Leftrightarrow c = -13.$$

Vậy phương trình đường thẳng chứa cạnh  $BC$  :  $7x - 3y - 13 = 0$ .

- 3.7. Hai đường trung tuyến đã cho đều không phải là đường trung tuyến xuất phát từ  $A$  vì toạ độ của  $A$  không thoả mãn các phương trình của chúng. Đặt  $BM$  :  $2x - y + 1 = 0$  và  $CN$  :  $x + y - 4 = 0$  là hai trung tuyến của tam giác  $ABC$ .

Đặt  $B(x; y)$ , ta có  $N\left(\frac{x-2}{2}; \frac{y+3}{2}\right)$  và

$$\begin{aligned} \begin{cases} B \in BM \\ N \in CN \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ \frac{x-2}{2} + \frac{y+3}{2} - 4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = 7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đường thẳng chứa cạnh  $AB$  là :  $2x - 4y + 16 = 0$

$$\Leftrightarrow x - 2y + 8 = 0.$$

Tương tự ta có phương trình đường thẳng chứa cạnh  $AC$  là :  $2x + 5y - 11 = 0$ .

Phương trình đường thẳng chứa cạnh  $BC$  là :  $4x + y - 13 = 0$ .

- 3.8.  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  có vectơ pháp tuyến lần lượt là  $\vec{n}_1 = (m; 1)$   
 $\vec{n}_2 = (1; -1).$

$$\begin{aligned}\text{Ta có : } \Delta_1 \perp \Delta_2 &\Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow m - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow m = 1.\end{aligned}$$

**3.9.** a) Đưa phương trình của  $d$  và  $d'$  về dạng tổng quát

$$d : 4x + 5y - 6 = 0$$

$$d' : 4x + 5y + 14 = 0$$

$$\frac{4}{4} = \frac{5}{5} \neq \frac{-6}{14}. \text{ Vậy } d \parallel d'.$$

b)  $d : x + 2y - 5 = 0$

$$d' : 2x + 4y - 10 = 0$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-5}{-10}. \text{ Vậy } d \equiv d'.$$

c)  $d : x + y - 2 = 0$

$$d' : 2x + y - 3 = 0$$

$$\frac{1}{2} \neq \frac{1}{1}. \text{ Vậy } d \text{ cắt } d'.$$

**3.10.**  $\cos(\widehat{d_1, d_2}) = \frac{|2-2|}{\sqrt{1+4}\sqrt{4+1}} = 0. \text{ Vậy } (\widehat{d_1, d_2}) = 90^\circ.$

**3.11.**  $R = d(I, \Delta) = \frac{|4-15+1|}{\sqrt{16+9}} = 2.$

**3.12.** Phương trình hai đường phân giác của các góc giữa  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  là :

$$\begin{aligned}\frac{2x+4y+7}{\sqrt{4+16}} &= \pm \frac{x-2y-3}{\sqrt{1+4}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y+7 = 2(x-2y-3) \\ 2x+4y+7 = -2(x-2y-3) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 8y+13=0 \\ 4x+1=0. \end{cases}\end{aligned}$$

**3.13.**  $d(M, \Delta_1) = d(M, \Delta_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{|5x+3y-3|}{\sqrt{25+9}} = \frac{|5x+3y+7|}{\sqrt{25+9}} \Leftrightarrow 5x+3y+2=0.$$



$$d_2 : x - 2 = 0.$$

3.18. a)  $x - y - 7 = 0$  (d) hay  $x + y - \frac{9}{7} = 0$  (d').

b)  $I_1\left(\frac{8}{3}; -\frac{13}{3}\right), I_2\left(-\frac{2}{7}; \frac{11}{7}\right).$

c)  $(\mathcal{C}_1): \left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{13}{3}\right)^2 = \left(\frac{31}{15}\right)^2$   
 $(\mathcal{C}_2): \left(x + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{7}\right)^2 = \left(\frac{31}{35}\right)^2.$

3.19.  $(\mathcal{C}_1): x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$

$(\mathcal{C}_2): x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0.$

3.20. a)  $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0;$

b)  $x^2 + y^2 - x + y - 4 = 0.$

3.21. Phương trình của  $(\mathcal{C})$  có dạng  $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$ , ta có :

$$M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow (4 - a)^2 + (2 - a)^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 12a + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 10. \end{cases}$$

Vậy có hai đường tròn thoả mãn đề bài là :

$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$  và  $(x - 10)^2 + (y - 10)^2 = 100.$

3.22. a)  $M_1(1; 0), M_2(-3; 3).$

b)  $\Delta_1: x - 7y - 1 = 0; \Delta_2: 7x + y + 18 = 0.$

c)  $A\left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right).$

3.23. a)  $(\mathcal{C})$  có tâm  $I(3; -1)$  và có bán kính  $R = 2$ , ta có :

$$IA = \sqrt{(3 - 1)^2 + (-1 - 3)^2} = 2\sqrt{5}$$

$IA > R$ , vậy  $A$  nằm ngoài  $(\mathcal{C})$ .

b)  $\Delta_1 : 3x + 4y - 15 = 0$ ;  $\Delta_2 : x - 1 = 0$ .

**3.24.**  $\Delta$  vuông góc với  $d$  nên phương trình  $\Delta$  có dạng :  $x + 3y + c = 0$ .

$(\mathcal{C})$  có tâm  $I(3 ; -1)$  và có bán kính  $R = \sqrt{10}$ . Ta có :

$$\Delta \text{ tiếp xúc với } (\mathcal{C}) \Leftrightarrow d(I ; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|3 - 3 + c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow c = \pm 10.$$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn đề bài là :

$$\Delta_1 : x + 3y + 10 = 0 \text{ và } \Delta_2 : x + 3y - 10 = 0.$$

**3.25.** a)  $(\mathcal{C})$  có tâm  $I(-1 ; 2)$  và có bán kính  $R = 3$ . Đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $M(2 ; -1)$  và có hệ số góc  $k$  có phương trình :

$$y + 1 = k(x - 2) \Leftrightarrow kx - y - 2k - 1 = 0.$$

Ta có :  $\Delta$  tiếp xúc với  $(\mathcal{C}) \Leftrightarrow d(I, \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|-k - 2 - 2k - 1|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 3$$

$$\Leftrightarrow |k + 1| = \sqrt{k^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 2k + 1 = k^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow k = 0.$$

Vậy ta được tiếp tuyến  $\Delta_1 : y + 1 = 0$ .

Xét đường thẳng  $\Delta_2$  đi qua  $M(2 ; -1)$  và vuông góc với  $Ox$ ,  $\Delta_2$  có phương trình  $x - 2 = 0$ . Ta có  $d(I, \Delta_2) = |-1 - 2| = 3 = R$ .

Suy ra  $\Delta_2$  tiếp xúc với  $(\mathcal{C})$ .

Vậy qua điểm  $M$  ta vẽ được hai tiếp tuyến với  $(\mathcal{C})$ , đó là :

$$\Delta_1 : y + 1 = 0 \text{ và } \Delta_2 : x - 2 = 0.$$

b)  $\Delta_1$  tiếp xúc với  $(\mathcal{C})$  tại  $M_1(-1 ; -1)$

$\Delta_2$  tiếp xúc với  $(\mathcal{C})$  tại  $M_2(2 ; 2)$ .

Phương trình của đường thẳng  $d$  đi qua  $M_1$  và  $M_2$  là :  $x - y = 0$ .

**3.26.** Đường tròn ( $\mathcal{C}$ ) :  $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$  có tâm  $I(4 ; 3)$  và có bán kính  $R = 5$ .

*Cách 1 :* Xét đường thẳng  $\Delta$  đi qua gốc toạ độ  $O$  và có hệ số góc  $k$ ,  $\Delta$  có phương trình  $y - kx = 0$ .

Ta có :  $\Delta$  tiếp xúc với ( $\mathcal{C}$ )  $\Leftrightarrow d(I, \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|3 - 4k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 5$$

$$\Leftrightarrow (3 - 4k)^2 = 25(k^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 9 + 16k^2 - 24k = 25k^2 + 25$$

$$\Leftrightarrow 9k^2 + 24k + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{4}{3}.$$

Vậy ta được phương trình tiếp tuyến là :  $y + \frac{4}{3}x = 0$  hay  $4x + 3y = 0$ .

*Cách 2 :* Do toạ độ  $O(0 ; 0)$  thoả mãn phương trình của ( $\mathcal{C}$ ) nên điểm  $O$  nằm trên ( $\mathcal{C}$ ). Tiếp tuyến với ( $\mathcal{C}$ ) tại  $O$  có vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = \overrightarrow{OI} = (4 ; 3)$ .

Suy ra  $\Delta$  có phương trình

$$4x + 3y = 0.$$

**3.27.** a) ( $\mathcal{C}_1$ ) có tâm  $I_1(3 ; 0)$  và có bán kính  $R_1 = 2$  ;

( $\mathcal{C}_2$ ) có tâm  $I_2(6 ; 3)$  và có bán kính  $R_2 = 1$ .

b) Xét đường thẳng  $\Delta$  có phương trình :

$$y = kx + m \text{ hay } kx - y + m = 0. \text{ Ta có :}$$

$\Delta$  tiếp xúc với ( $\mathcal{C}_1$ ) và ( $\mathcal{C}_2$ ) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} d(I_1, \Delta) = R_1 \\ d(I_2, \Delta) = R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|3k + m|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2 \\ \frac{|6k - 3 + m|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$|3k + m| = 2|6k - 3 + m|.$$

*Trường hợp 1.*  $3k + m = 2(6k - 3 + m) \Leftrightarrow m = 6 - 9k.$  (3)

Thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned} |6k - 3 + 6 - 9k| &= \sqrt{k^2 + 1} \Leftrightarrow |3 - 3k| = \sqrt{k^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow 9 - 18k + 9k^2 = k^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow 8k^2 - 18k + 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4k^2 - 9k + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{9 + \sqrt{17}}{8} \\ k_2 = \frac{9 - \sqrt{17}}{8} \end{cases} \end{aligned}$$

Thay giá trị của  $k$  vào (3) ta tính được

$$\begin{cases} m_1 = 6 - 9k_1 \\ m_2 = 6 - 9k_2. \end{cases}$$

Vậy ta được hai tiếp tuyến

$$\Delta_1 : y = k_1 x + 6 - 9k_1$$

$$\Delta_2 : y = k_2 x + 6 - 9k_2.$$

*Trường hợp 2.*  $3k + m = -2(6k - 3 + m) \Leftrightarrow 3m = 6 - 15k$   
 $\Leftrightarrow m = 2 - 5k.$  (4)

Thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned} |6k - 3 + 2 - 5k| &= \sqrt{k^2 + 1} \Leftrightarrow |k - 1| = \sqrt{k^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow (k - 1)^2 = k^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = k^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow k = 0. \end{aligned}$$

Thay giá trị của  $k$  vào (4) ta được  $m = 2$ .

Vậy ta được tiếp tuyến

$$\Delta_3 : y = 2.$$

Xét đường thẳng  $\Delta_4$  vuông góc với  $Ox$  tại  $x_0$  :

$$\Delta_4 : x - x_0 = 0.$$

$\Delta_4$  tiếp xúc với  $(\mathcal{C}_1)$  và  $(\mathcal{C}_2)$  khi và chỉ khi

$$\begin{cases} d(I_1, \Delta_4) = R_1 \\ d(I_2, \Delta_4) = R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3 - x_0| = 2 \\ |6 - x_0| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \vee x_0 = 5 \\ x_0 = 5 \vee x_0 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 5.$$

Vậy ta được tiếp tuyến

$$\Delta_4 : x - 5 = 0.$$

Tóm lại hai đường tròn  $(\mathcal{C}_1)$  và  $(\mathcal{C}_2)$  có bốn tiếp tuyến chung  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  và  $\Delta_4$ .

### §3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELIP

$$3.28. \quad \text{a) } (E) : \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 ; \quad \text{b) } (E) : \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

$$3.29. \quad \text{a) } (E) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

– Hai tiêu điểm :  $F_1(-\sqrt{5} ; 0), F_2(\sqrt{5} ; 0)$ .

– Bốn đỉnh :  $A_1(-3 ; 0), A_2(3 ; 0), B_1(0 ; -2), B_2(0 ; 2)$ .

– Trục lớn :  $A_1A_2 = 6$ .

– Trục nhỏ :  $B_1B_2 = 4$ .

$$\text{b) } (E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

– Hai tiêu điểm :  $F_1(-\sqrt{3} ; 0), F_2(\sqrt{3} ; 0)$ .

– Bốn đỉnh :  $A_1(-2 ; 0), A_2(2 ; 0), B_1(0 ; -1), B_2(0 ; 1)$ .

– Trục lớn :  $A_1A_2 = 4$ .

– Trục nhỏ :  $B_1B_2 = 2$ .

$$3.30. \quad \mathcal{C}(M ; R) \text{ đi qua } F_2 \Rightarrow MF_2 = R \quad (1)$$

$$\mathcal{C}(M ; R) \text{ tiếp xúc trong với } \mathcal{C}_1(F_1 ; 2a) \Rightarrow MF_1 = 2a - R \quad (2)$$

$$(1) + (2) \text{ cho : } MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Vậy  $M$  di động trên elip  $(E)$  có hai điểm là  $F_1, F_2$  và trục lớn  $2a$ .

**3.31.** Điểm  $M$  di động trên elip  $(E)$  có phương trình  $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$ .

**3.32.** a) Ta có :  $2a = 26 \Rightarrow a = 13$  và :

$$\frac{c}{a} = \frac{c}{13} = \frac{5}{13} \Rightarrow c = 5.$$

Do đó  $b^2 = a^2 - c^2 = 169 - 25 = 144$ .

Vậy phương trình chính tắc của elip là

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1.$$

b) Elip có tiêu điểm  $F_1(-6; 0)$  suy ra  $c = 6$ . Vậy :

$$\frac{c}{a} = \frac{6}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 9.$$

Do đó :  $b^2 = a^2 - c^2 = 81 - 36 = 45$ .

Vậy phương trình chính tắc của elip là

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1.$$

**3.33.** a) Xét elip  $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

$(E)$  đi qua  $M\left(4; \frac{9}{5}\right)$  và  $N\left(3; \frac{12}{5}\right)$  nên thay toạ độ của  $M$  và  $N$  vào phương trình của  $(E)$  ta được :

$$\begin{cases} \frac{16}{a^2} + \frac{81}{25b^2} = 1 \\ \frac{9}{a^2} + \frac{144}{25b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9. \end{cases}$$

Vậy phương trình của  $(E)$  là :  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

b) Xét elip  $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Vì  $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right) \in (E)$  nên  $\frac{9}{5a^2} + \frac{16}{5b^2} = 1$ . (1)

Ta có :  $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ \Rightarrow OM = OF_1$

$$\Rightarrow c^2 = OM^2 = \frac{9}{5} + \frac{16}{5} = 5$$

và  $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 5$ .

Thay vào (1) ta được :

$$\frac{9}{5(b^2 + 5)} + \frac{16}{5b^2} = 1 \Leftrightarrow 9b^2 + 16(b^2 + 5) = 5b^2(b^2 + 5)$$

$$\Leftrightarrow b^4 = 16$$

$$\Leftrightarrow b^2 = 4.$$

Suy ra  $a^2 = 9$ .

Vậy phương trình chính tắc của  $(E)$  là

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

**3.34.**  $(E) : 9x^2 + 25y^2 = 225 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

a) Ta có :  $a^2 = 25, b^2 = 9$

$$\Rightarrow a = 5, b = 3.$$

Ta có :  $c^2 = a^2 - b^2 = 16$

$$\Rightarrow c = 4.$$

Vậy  $(E)$  có hai tiêu điểm là :  $F_1(-4 ; 0)$  và  $F_2(4 ; 0)$  và có bốn đỉnh là  $A_1(-5 ; 0), A_2(5 ; 0), B_1(0 ; -3)$  và  $B_2(0 ; 3)$ .

b) Gọi  $M(x ; y)$  là điểm cần tìm, ta có :

$$\begin{cases} M \in (E) \\ \widehat{F_1MF_2} = 90^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (E) \\ OM^2 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 + 25y^2 = 225 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{175}{16} \\ y^2 = \frac{81}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{5\sqrt{7}}{4} \\ y = \pm \frac{9}{4} \end{cases}.$$

Vậy có bốn điểm  $M$  thoả mãn điều kiện của đề bài là :

$$\left( \frac{5\sqrt{7}}{4} ; \frac{9}{4} \right) ; \left( \frac{5\sqrt{7}}{4} ; -\frac{9}{4} \right), \left( -\frac{5\sqrt{7}}{4} ; \frac{9}{4} \right), \left( -\frac{5\sqrt{7}}{4} ; -\frac{9}{4} \right).$$

3.35. a) Ta có :  $a = 3b \Rightarrow a^2 = 9b^2$   
 $\Rightarrow a^2 = 9(a^2 - c^2)$   
 $\Rightarrow 9c^2 = 8a^2$   
 $\Rightarrow 3c = 2\sqrt{2}a.$

Vậy  $\frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$

b)  $\widehat{F_1B_1F_2} = 90^\circ \Rightarrow OB_1 = \frac{F_1F_2}{2}$   
 $\Rightarrow b = c$   
 $\Rightarrow b^2 = c^2$   
 $\Rightarrow a^2 - c^2 = c^2$   
 $\Rightarrow a^2 = 2c^2$   
 $\Rightarrow a = c\sqrt{2}.$

Vậy  $\frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

c)  $A_1B_1 = 2c \Rightarrow A_1B_1^2 = 4c^2$   
 $\Rightarrow a^2 + b^2 = 4c^2$   
 $\Rightarrow a^2 + a^2 - c^2 = 4c^2$   
 $\Rightarrow 2a^2 = 5c^2$   
 $\Rightarrow \sqrt{2}a = \sqrt{5}c.$

Vậy  $\frac{c}{a} = \sqrt{\frac{2}{5}}.$

$$3.36. (E) : 4x^2 + 9y^2 = 36. \quad (1)$$

Xét đường thẳng  $(d)$  đi qua điểm  $M(1 ; 1)$  và có hệ số góc  $k$ . Ta có phương trình của  $(d) : y - 1 = k(x - 1)$  hay  $y = k(x - 1) + 1$ .  $(2)$

Thay  $(2)$  vào  $(1)$  ta được

$$4x^2 + 9[k(x - 1) + 1]^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow (9k^2 + 4)x^2 + 18k(1 - k)x + 9(1 - k)^2 - 36 = 0. \quad (3)$$

Ta có :  $(d)$  cắt  $(E)$  tại hai điểm  $A, B$  thoả mãn

$MA = MB$  khi và chỉ khi phương trình  $(3)$  có hai nghiệm  $x_A, x_B$  sao cho :

$$\frac{x_A + x_B}{2} = x_M \Leftrightarrow \frac{-18k(1 - k)}{2(9k^2 + 4)} = 1$$

$$\Leftrightarrow 18k^2 - 18k = 18k^2 + 8 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{9}.$$

Vậy phương trình của  $(d)$  là :

$$y = -\frac{4}{9}(x - 1) + 1 \text{ hay } 4x + 9y - 13 = 0.$$

### CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

$$3.37. \text{ a) } G\left(-1 ; -\frac{4}{3}\right), H(11 ; -2), I(-7 ; -1).$$

$$\text{b) } \overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG} \text{ suy ra } I, G, H \text{ thẳng hàng.}$$

$$\text{c) } (x + 7)^2 + (y + 1)^2 = 85.$$

$$3.38. \text{ a) } A \in \Delta ; B \notin \Delta.$$

$$\text{b) } \Delta \text{ cắt } Ox \text{ tại } M(2 ; 0)$$

$$\Delta \text{ cắt } Oy \text{ tại } N\left(0 ; \frac{2}{3}\right).$$

$$\text{c) } \text{Vì } M \in \Delta \text{ nên toạ độ của } M \text{ có dạng } (2 - 3t ; t)$$

$$\overrightarrow{BM} = (-3t ; t - 1)$$

$$\vec{u}_{\Delta} = (-3 ; 1).$$

Ta có :  $BM$  ngắn nhất  $\Leftrightarrow \overline{BM} \perp \vec{u}_\Delta \Leftrightarrow 9t + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{10}$ .

Vậy điểm  $M$  thoả mãn đề bài có toạ độ là  $\left(\frac{17}{10}; \frac{1}{10}\right)$ .

3.39.  $x + 2y - 3 = 0;$

$2x - y - 6 = 0;$

$2x - y + 9 = 0.$

3.40. a) Ta có  $\Delta(O) = 2 > 0$

$\Delta(A) = 2 + 2 > 0.$

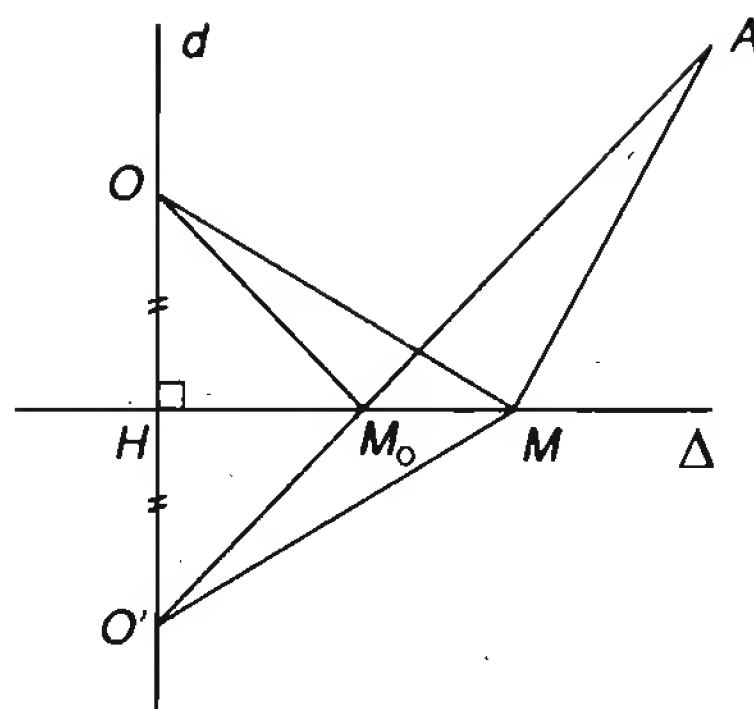
Vậy  $A$  và  $O$  nằm về cùng một phía đối với  $\Delta$  (h.3.10).

b) Gọi  $O'$  là điểm đối xứng của  $O$  qua  $\Delta$ , ta có :

$OM + MA = O'M + MA \geq O'A$

Ta có :  $OM + MA$  ngắn nhất

$\Leftrightarrow O', M, A$  thẳng hàng.



Hình 3.10

Xét đường thẳng  $d$  đi qua  $O$  và vuông góc với  $\Delta$ . Phương trình của  $d$  là :

$x + y = 0.$

$d$  cắt  $\Delta$  tại  $H(-1; 1)$ .

$H$  là trung điểm của  $OO'$ , suy ra  $O'(-2; 2)$ .

Phương trình đường thẳng  $O'A$  là :  $x + 2y - 2 = 0.$

Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - y = -2 \end{cases}$  ta được  $M = \left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$ .

3.41. a)  $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - \frac{25}{3}x - \frac{19}{3}y + \frac{68}{3} = 0.$

b)  $(\mathcal{C})$  có tâm  $I\left(\frac{25}{6}; \frac{19}{6}\right)$  và có bán kính  $R = \sqrt{\frac{85}{18}}.$

3.42. a) (1) là phương trình của đường tròn khi và chỉ khi

$$a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4(m - 2)^2 - 6 + m > 0$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 2. \end{cases}$$

b)  $(C_m)$  có tâm  $I(x ; y)$  thoả mãn  $\begin{cases} x = m \\ y = 2(m - 2) \end{cases} \Leftrightarrow y = 2x - 4.$

Vậy tập hợp các tâm của  $(C_m)$  là một phần của đường thẳng  $\Delta : y = 2x - 4$  thoả mãn điều kiện giới hạn :  $x < 1$  hay  $x > 2.$

3.43. a)  $(E) : \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 ;$

b)  $(E) : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$

3.44.  $(E) : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

Ta có :  $a^2 = 25, b^2 = 9 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 16$   
 $\Rightarrow c = 4.$

Vậy  $(E)$  có hai tiêu điểm là  $F_1(-4 ; 0)$  và  $F_2(4 ; 0).$  Ta có :

$$d_1 = d(F_1 , \Delta) = \frac{|-4A + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d_2 = d(F_2 , \Delta) = \frac{|4A + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Suy ra  $d_1.d_2 = \frac{|C^2 - 16A^2|}{A^2 + B^2}.$  (1)

Thay  $C^2 = 25A^2 + 9B^2$  vào (1) ta được :

$$d_1.d_2 = \frac{|25A^2 + 9B^2 - 16A^2|}{A^2 + B^2} = \frac{9(A^2 + B^2)}{A^2 + B^2}.$$

Vậy  $d_1.d_2 = 9.$

**3.45.**  $(E) : x^2 + 4y^2 = 16 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$

Ta có  $a^2 = 16, b^2 = 4 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 12$   
 $\Rightarrow c = 2\sqrt{3}.$

Vậy  $(E)$  có hai tiêu điểm :  $F_1(-2\sqrt{3} ; 0)$  và  $F_2(2\sqrt{3} ; 0)$

và các đỉnh  $A_1(-4 ; 0), A_2(4 ; 0)$

$$B_1(0 ; -2), B_2(0 ; 2).$$

b) Phương trình  $\Delta$  có dạng :

$$1(x - 1) + 2\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0 \text{ hay } x + 2y - 2 = 0.$$

c) Toạ độ của giao điểm của  $\Delta$  và  $(E)$  là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 16 & (1) \\ x = 2 - 2y. & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được :

$$\begin{aligned} (2 - 2y)^2 + 4y^2 &= 16 \\ \Leftrightarrow (1 - y)^2 + y^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow 2y^2 - 2y - 3 &= 0. & (3) \end{aligned}$$

Phương trình (3) có hai nghiệm  $y_A, y_B$  thoả mãn

$$\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = y_M.$$

Vậy  $MA = MB.$

Ta có  $y_A = \frac{1 - \sqrt{7}}{2}, y_B = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}$

$$x_A = 1 + \sqrt{7}, x_B = 1 - \sqrt{7}.$$

Vậy  $A$  có toạ độ là  $\left(1 + \sqrt{7} ; \frac{1 - \sqrt{7}}{2}\right), B$  có toạ độ là  $\left(1 - \sqrt{7} ; \frac{1 + \sqrt{7}}{2}\right).$

## CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

3.46.  $\overrightarrow{BA} = (-2 ; 2)$

$\overrightarrow{BC} = (2 ; 2)$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \widehat{ABC} = 90^\circ.$

Đường tròn ngoại tiếp có tâm là trung điểm  $I$  của  $AC$  nên có toạ độ  $(3 ; 4)$ .  
Chọn (D).

3.47. Chọn (A).

3.48. Đường thẳng  $\Delta : 6x - 4y - 12 = 0$  cắt  $Ox$  và  $Oy$  lần lượt tại  $A(2 ; 0)$  và  $B(0 ; -3)$ .

Ta có  $AB = \sqrt{13}$ . Chọn (C).

3.49. Chọn (A).

3.50. Đường thẳng  $\Delta : 2x + y - 4 = 0$  song song với đường thẳng  $d : 4x + 2y + 1 = 0$  và đi qua điểm  $M(1 ; 2)$ . Chọn (C).

3.51. Đường thẳng  $\Delta : 3x + 5y + 2006 = 0$  có hệ số góc là  $k = -\frac{3}{5}$ . Phát biểu (C) sai. Chọn (C).

3.52. Điểm  $C(2 ; 2)$  có toạ độ thoả mãn phương trình đường thẳng  $\Delta : x - 2y + 2 = 0$ .  
Ta lại có  $\overrightarrow{MC} = (1 ; -2)$ ,  $\overrightarrow{n}_\Delta = (1 ; -2)$  suy ra  $MC$  vuông góc với  $\Delta$ . Vậy  $C(2 ; 2)$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  xuống  $\Delta$ . Chọn (C).

3.53. Đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $A(1 ; 1)$ ,  $B(2 ; 2)$  có vectơ chỉ phương  $\overrightarrow{AB} = (1 ; 1)$ .

Vậy  $\Delta$  có phương trình tham số  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t. \end{cases}$

Điểm  $O(0 ; 0)$  thoả mãn phương trình của  $\Delta$  (ứng với  $t = -1$ ). Vậy phương trình tham số của  $\Delta$  có thể viết là  $\begin{cases} x = t \\ y = t. \end{cases}$

Chọn (D).

3.54.  $R = d(O ; \Delta) = \frac{100}{\sqrt{64 + 36}} = 10.$

Chọn (D).

3.55.  $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|1-6|}{\sqrt{1+4}\sqrt{1+9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Chọn (C).

3.56.  $(Ox, \Delta_1) = 45^\circ, (Ox, \Delta_2) = 60^\circ.$  Suy ra  $(\Delta_1, \Delta_2) = 15^\circ.$  Chọn (B).

3.57. Phương trình  $x^2 + y^2 + x + y + 2 = 0$  không là phương trình của đường tròn vì không thoả mãn điều kiện  $a^2 + b^2 - c > 0.$  Chọn (B).

3.58. Toạ độ ba điểm  $A(-2 ; 0), B(\sqrt{2} ; \sqrt{2}), C(2 ; 0)$  đều thoả mãn phương trình đường tròn  $x^2 + y^2 = 4.$  Chọn (A).

3.59. Đường tròn nội tiếp tam giác  $OAB$  có tâm  $I(a ; a).$  Ta có  $d(I, AB) = d(I, Ox)$  suy ra  $I(1 ; 1).$  Ta có  $R = d(I, Ox) = 1.$

Vậy phương trình của đường tròn nội tiếp tam giác  $OAB$  là :

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

Chọn (C).

3.60.  $(C_1)$  có tâm  $I_1(-1 ; 3)$  và bán kính  $R_1 = 2.$

$(C_2)$  có tâm  $I_2(2 ; -1)$  và bán kính  $R_2 = 3.$

Ta có  $I_1I_2 = R_1 + R_2.$

Vậy  $(C_1)$  tiếp xúc ngoài với  $(C_2).$

Chọn (D).

3.61. Tiếp tuyến  $\Delta$  có vectơ pháp tuyến  $\overrightarrow{OM_0} = (1 ; 1).$

Phương trình  $\Delta$  có dạng

$$1.(x - 1) + 1.(y - 1) = 0$$

hay  $x + y - 2 = 0.$  Chọn (A).

3.62.  $IM > R$  suy ra điểm  $M$  nằm ngoài đường tròn. Chọn (C).

3.63. Đường tròn  $(C)$  đi qua gốc  $O(0 ; 0).$  Chọn (B).

3.64. Chọn (B).

3.65. Chọn (C).

- 3.66.  $(E)$  đi qua các điểm  $M_1, M_2, M_3$ . Chọn (D).
- 3.67. Chọn (D).
- 3.68. Chọn (C).
- 3.69.  $(C)$  tiếp xúc với  $(E)$  tại  $A_1(-5 ; 0)$  và  $A_2(5 ; 0)$ . Chọn (C).
- 3.70.  $d(F_1, \Delta) \times d(F_2, \Delta) = b^2 = 9$ . Chọn (B).
- 3.71.  $OA = OB = OC = 3$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  có phương trình  $x^2 + y^2 - 9 = 0$ . Chọn (D).
- 3.72.  $\Delta$  tiếp xúc với  $C(0 ; 1) \Leftrightarrow d(O ; \Delta) = 1$   
 $\Leftrightarrow |m| = 1$ .  
 Chọn (A).

## BÀI TẬP CUỐI NĂM

1. Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho tam giác  $ABC$ , biết đỉnh  $A(1 ; 1)$  và tọa độ trọng tâm  $G(1 ; 2)$ . Cạnh  $AC$  và đường trung trực của nó lần lượt có phương trình là  $x + y - 2 = 0$  và  $-x + y - 2 = 0$ . Các điểm  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AC$ .  
 a) Hãy tìm tọa độ các điểm  $M$  và  $N$ .  
 b) Viết phương trình hai đường thẳng chứa hai cạnh  $AB$  và  $BC$ .
2. Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho tam giác  $ABC$  có  $AB = AC$ ,  $\widehat{BAC} = 90^\circ$ . Biết  $M(1 ; -1)$  là trung điểm cạnh  $BC$  và  $G\left(\frac{2}{3} ; 0\right)$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .  
 Tìm tọa độ các đỉnh  $A, B, C$ .
3. Cho ba điểm  $A(1 ; 2), B(-3 ; 1), C(4 ; -2)$ .  
 a) Chứng minh rằng tập hợp các điểm  $M(x ; y)$  thỏa mãn  $MA^2 + MB^2 = MC^2$  là một đường tròn.  
 b) Tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn nói trên.
4. Cho hai điểm  $A(3 ; -1), B(-1 ; -2)$  và đường thẳng  $d$  có phương trình  $x + 2y + 1 = 0$ .  
 a) Tìm tọa độ điểm  $C$  trên đường thẳng  $d$  sao cho tam giác  $ABC$  là tam giác cân tại  $C$ .



b) Tìm toạ độ của điểm  $M$  trên đường thẳng  $d$  sao cho tam giác  $AMB$  vuông tại  $M$ .

5. Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho đường tròn  $(T)$  có phương trình

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0.$$

a) Tìm toạ độ tâm và tính bán kính của đường tròn  $(T)$ .

b) Tìm  $m$  để đường thẳng  $y = x + m$  có điểm chung với đường tròn  $(T)$ .

c) Viết phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  với đường tròn  $(T)$  biết rằng  $\Delta$  vuông góc với đường thẳng  $d$  có phương trình  $x - y + 2006 = 0$ .

6. Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho elip  $(E)$  có tiêu điểm thứ nhất là  $(-\sqrt{3}; 0)$  và đi qua điểm  $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

a) Hãy xác định toạ độ các đỉnh của  $(E)$ .

b) Viết phương trình chính tắc của  $(E)$ .

c) Đường thẳng  $\Delta$  đi qua tiêu điểm thứ hai của elip  $(E)$  và vuông góc với trục  $Ox$  và cắt  $(E)$  tại hai điểm  $C$  và  $D$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $CD$ .

## HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

$$1. \quad a) \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 1 = \frac{3}{2}(1 - 1) \\ y_M - 1 = \frac{3}{2}(2 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = \frac{5}{2} \end{cases}$$

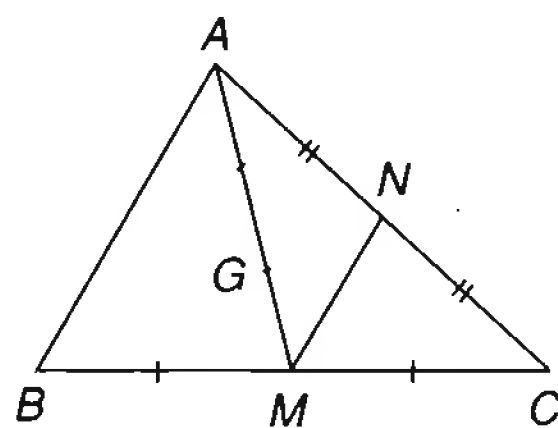
Vậy  $M$  có toạ độ là  $\left(1; \frac{5}{2}\right)$  (h.3.11).

Điểm  $N(x; y)$  thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy  $N$  có toạ độ là  $(0; 2)$ .

$$b) \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{NM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - 1 = 2(1 - 0) \\ y_B - 1 = 2\left(\frac{5}{2} - 2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 3 \\ y_B = 2 \end{cases}$$



Hình 3.11

Đường thẳng chứa cạnh  $AB$  đi qua hai điểm  $A(1 ; 1)$  và  $B(3 ; 2)$  nên có phương trình :  $x - 2y + 1 = 0$ .

Đường thẳng chứa cạnh  $BC$  đi qua hai điểm  $B(3 ; 2)$  và  $M\left(1 ; \frac{5}{2}\right)$  nên có phương trình :  $x + 4y - 11 = 0$ .

$$2. \quad (\text{Xem hình 3.12}) \quad \overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - 1 = 3\left(\frac{2}{3} - 1\right) \\ y_A + 1 = 3(0 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 2. \end{cases}$$

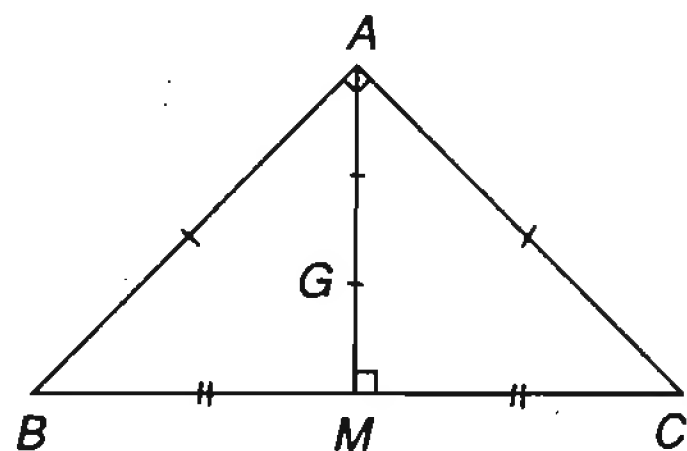
Vậy  $A$  toạ độ  $(0 ; 2)$ .

Đặt  $B(x ; y)$  ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MA} \\ MB^2 = MA^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(0-1) + (y+1)(2+1) = 0 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1+9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 4 \\ (3y+3)^2 + (y+1)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 4 \\ 10y^2 + 20y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, & x = 4 \\ y = -2, & x = -2. \end{cases}$$

Vậy ta có toạ độ của  $B$  và  $C$  như sau :  $B(4 ; 0)$ ,  $C(-2 ; -2)$  hoặc  $B(-2 ; -2)$ ,  $C(4 ; 0)$ .



Hình 3.12

$$3. \quad a) \quad MA^2 + MB^2 = MC^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (x+3)^2 + (y-1)^2 = (x-4)^2 + (y+2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 12x - 10y - 5 = 0 \Leftrightarrow (x+6)^2 + (y-5)^2 = 66.$$

Vậy tập hợp các điểm  $M$  là một đường tròn.

b) Tâm là điểm  $(-6 ; 5)$  bán kính bằng  $\sqrt{66}$ .

$$4. \quad a) \quad \text{Đặt } C(x ; y), \text{ ta có : } C \in (d) \Leftrightarrow x = -2y - 1.$$

Vậy  $C(-2y - 1 ; y)$ .

Tam giác  $ABC$  cân tại  $C$  khi và chỉ khi

$$CA = CB \Leftrightarrow CA^2 = CB^2$$

$$\Leftrightarrow (3 + 2y + 1)^2 + (-1 - y)^2 = (-1 + 2y + 1)^2 + (-2 - y)^2$$

$$\Leftrightarrow (4 + 2y)^2 + (1 + y)^2 = 4y^2 + (2 + y)^2.$$

Giải ra ta được  $y = -\frac{13}{14}$ .

$$x = -2\left(\frac{-13}{14}\right) - 1 = \frac{13}{7} - 1 = \frac{6}{7}.$$

Vậy  $C$  có toạ độ là  $\left(\frac{6}{7}; -\frac{13}{14}\right)$ .

b) Xét điểm  $M(-2t-1; t)$  trên  $(d)$ , ta có :

$$\begin{aligned}\widehat{AMB} = 90^\circ &\Leftrightarrow AM^2 + BM^2 = AB^2 \\ &\Leftrightarrow (4+2t)^2 + (1+t)^2 + 4t^2 + (2+t)^2 = 17 \\ &\Leftrightarrow 10t^2 + 22t + 4 = 0 \Leftrightarrow 5t^2 + 11t + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{5} \\ t = -2. \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy có hai điểm thoả mãn đề bài là  $M_1\left(-\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$  và  $M_2(3; -2)$ .

5. a) Đường tròn  $(T)$  có tâm là điểm  $(2; 1)$  và có bán kính bằng  $\sqrt{2}$ .

b)  $(l) : x - y + m = 0$ . Ta có :

$(l)$  có điểm chung với  $(T)$

$$\Leftrightarrow d(I, l) \leq R$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2-1+m|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |m+1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq m+1 \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1.$$

c)  $\Delta \perp d$  nên  $\Delta$  có phương trình  $x + y + c = 0$ .

Ta có :  $\Delta$  tiếp xúc với  $(T)$  khi và chỉ khi

$$d(I, \Delta) = R$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2+1+c|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |c+3| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} c+3=2 \\ c+3=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-1 \\ c=-5. \end{cases}$$

Vậy có hai tiếp tuyến với  $(T)$  thoả mãn đề bài là :

$$\Delta_1 : x + y - 1 = 0$$

$$\Delta_2 : x + y - 5 = 0.$$

6. a)  $(E)$  có tiêu điểm  $F_1(-\sqrt{3} ; 0)$  nên  $c = \sqrt{3}$ .

Phương trình chính tắc của  $(E)$  có dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ta có :  $M\left(1 ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in (E)$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \quad (1)$$

và  $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 3.$

Thay vào (1) ta được :

$$\frac{1}{b^2 + 3} + \frac{3}{4b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4b^2 + 3b^2 + 9 = 4b^2(b^2 + 3) \Leftrightarrow 4b^4 + 5b^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 1.$$

Suy ra  $a^2 = 4.$

Ta có  $a = 2 ; b = 1.$

Vậy  $(E)$  có bốn đỉnh là :  $(-2 ; 0), (2 ; 0),$   
 $(0 ; -1)$  và  $(0 ; 1).$

b) Phương trình chính tắc của  $(E)$  là :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

c)  $(E)$  có tiêu điểm thứ hai là điểm  $(\sqrt{3} ; 0)$ . Đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $(\sqrt{3} ; 0)$  và vuông góc với  $Ox$  có phương trình :  $x = \sqrt{3}.$

Phương trình tung độ giao điểm của  $\Delta$  và  $(E)$  là :

$$\frac{3}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{2}.$$

Suy ra toạ độ của  $C$  và  $D$  là :  $C\left(\sqrt{3} ; -\frac{1}{2}\right)$  và  $D\left(\sqrt{3} ; \frac{1}{2}\right).$

Vậy  $CD = 1.$

MỤC LỤC

	<i>Trang</i>	
<i>Lời nói đầu</i>	3	
<b>Chương I. VECTO</b>		
	<b>Bài tập</b>	<b>Hướng dẫn giải và Đáp số</b>
§1. Các định nghĩa	5	49
§2. Tổng và hiệu của hai vectơ	11	51
§3. Tích của vectơ với một số	22	53
§4. Hệ trục toạ độ	33	58
<i>Câu hỏi và bài tập ôn tập chương I</i>	43	61
<i>Câu hỏi trắc nghiệm</i>	44	64
 <b>Chương II. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO VÀ ỨNG DỤNG</b>		
	<b>Bài tập</b>	<b>Hướng dẫn giải và Đáp số</b>
§1. Giá trị lượng giác của một góc bất kì từ 0° đến 180°	66	101
§2. Tích vô hướng của hai vectơ	77	103
§3. Các hệ thức lượng trong tam giác và giải tam giác	87	109
<i>Câu hỏi và bài tập ôn tập chương II</i>	97	115
<i>Câu hỏi trắc nghiệm</i>	98	118
 <b>Chương III. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG</b>		
	<b>Bài tập</b>	<b>Hướng dẫn giải và Đáp số</b>
§1. Phương trình đường thẳng	121	155
§2. Phương trình đường tròn	132	159
§3. Phương trình đường elip	140	164
<i>Câu hỏi và bài tập ôn tập chương III</i>	148	168
<i>Câu hỏi trắc nghiệm</i>	150	172
<b>BÀI TẬP CUỐI NĂM</b>	174	175

*Chịu trách nhiệm xuất bản* : Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**  
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập **NGUYỄN QUÝ THAO**

*Biên tập lần đầu* : **ĐẶNG THỊ BÌNH - HOÀNG NGỌC PHƯƠNG**

*Biên tập tái bản* : **HOÀNG NGỌC PHƯƠNG**

*Biên tập kĩ - mĩ thuật* : **BÙI NGỌC LAN**

*Trình bày bìa* : **HOÀNG PHƯƠNG LIÊN**

*Sửa bản in* : **PHÒNG SỬA BẢN IN (NXBGD TẠI TP.HCM)**

*Chế bản* : **PHÒNG CHẾ BẢN (NXBGD TẠI TP.HCM)**

---

## **BÀI TẬP HÌNH HỌC 10**

**Mã số: CB004T1**

In 50.000 cuốn (ST) khổ 17 x 24cm. In tại Công ty cổ phần In Phú Thọ.

Số in: 914. Số xuất bản: 01-2011/CXB/815-1235/GD.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2011.



HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH



VƯƠNG MIỆN KIM CƯƠNG  
CHẤT LƯỢNG QUỐC TẾ

## SÁCH BÀI TẬP LỚP 10

- |  |                          |
|--|--------------------------|
| 1. BÀI TẬP ĐẠI SỐ 10                     | 6. BÀI TẬP TIN HỌC 10    |
| 2. BÀI TẬP HÌNH HỌC 10                   | 7. BÀI TẬP TIẾNG ANH 10  |
| 3. BÀI TẬP VẬT LÝ 10                     | 8. BÀI TẬP TIẾNG PHÁP 10 |
| 4. BÀI TẬP HOÁ HỌC 10                    | 9. BÀI TẬP TIẾNG NGÀ 10  |
| 5. BÀI TẬP NGỮ VĂN 10 (tập một, tập hai) |                          |

### SÁCH BÀI TẬP LỚP 10 - NÂNG CAO

- |                       |   |
|-----------------------|---|
| • BÀI TẬP ĐẠI SỐ 10   | • BÀI TẬP HOÁ HỌC 10                    |
| • BÀI TẬP HÌNH HỌC 10 | • BÀI TẬP NGỮ VĂN 10 (tập một, tập hai) |
| • BÀI TẬP VẬT LÝ 10   | • BÀI TẬP TIẾNG ANH 10                  |

### Bạn đọc có thể mua sách tại :

- Các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương.
- Công ty CP Đầu tư và phát triển giáo dục Hà Nội, 187B Giảng Võ, TP. Hà Nội.
- Công ty CP Đầu tư và phát triển giáo dục Phương Nam, 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. HCM.
- Công ty CP Đầu tư và phát triển giáo dục Đà Nẵng, 15 Nguyễn Chí Thanh, TP. Đà Nẵng.

### hoặc các cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam :

- Tại TP. Hà Nội : 187 Giảng Võ ; 232 Tây Sơn ; 23 Tràng Tiền ;  
25 Hàn Thuyên ; 32E Kim Mã ;  
14/3 Nguyễn Khánh Toàn ; 67B Cửa Bắc.
- Tại TP. Đà Nẵng : 78 Pasteur ; 247 Hải Phòng.
- Tại TP. Hồ Chí Minh : 104 Mai Thị Lựu ; 2A Đinh Tiên Hoàng, Quận 1 ;  
240 Trần Bình Trọng ; 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5.
- Tại TP. Cần Thơ : 5/5 Đường 30/4.
- Tại Website bán sách trực tuyến : [www.sach24.vn](http://www.sach24.vn)

Website: [www.nxbgd.vn](http://www.nxbgd.vn)



**Giá : 9.500đ**